This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

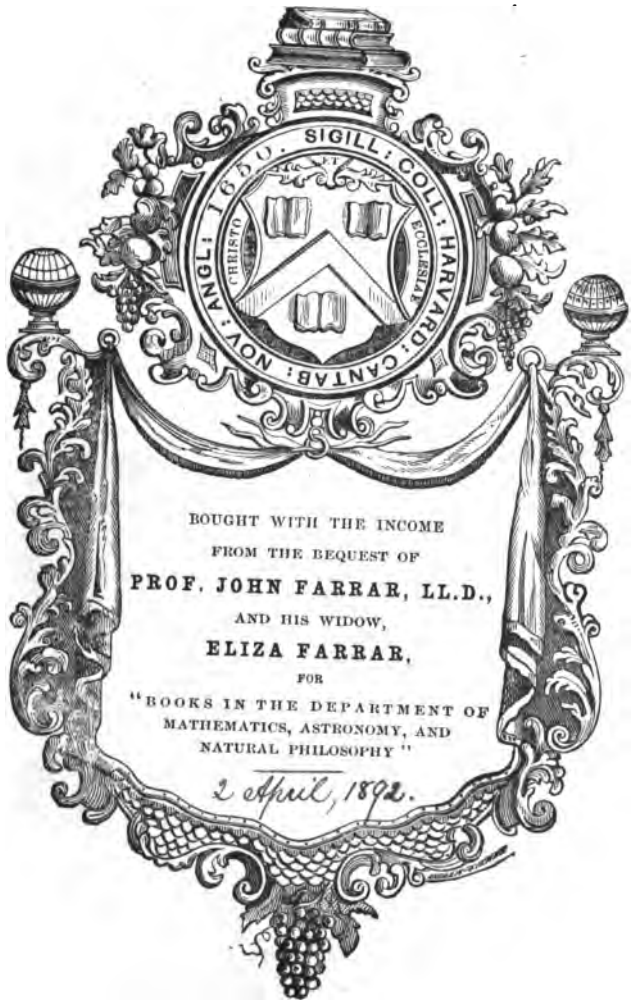
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Math 5008.88



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

2 April, 1892.

GERMANY AT

DIE HAUPTSÄCHLICHSTEN

THEORIEN DER GEOMETRIE

IN IHRER FRÜHEREN

UND

HEUTIGEN ENTWICKELUNG.

HISTORISCHE MONOGRAPHIE

VON

Dr. GINO LORIA,

PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT ZU GENUA.

UNTER BENUTZUNG ZAHLREICHER ZUSÄTZE UND VERBESSERUNGEN SEITENS DES VERFASSERS

INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN

VON

FRITZ SCHÜTTE.

MIT EINEM VORWORTE VON PROFESSOR R. STURM.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Math 5008.88

HARVARD COLLEGE
APR 2 1892
LIBRARY

Farrar fund.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Seiner teueren Mutter

als schwaches Unterpfand inniger Liebe

widmet diese Arbeit

der Verfasser.

Vorwort.

Diese deutsche Übersetzung der im vergangenen Jahre in den *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* (Ser. II, Bd. 38) erschienenen Monographie des Herrn Gino Loria: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, welche mein Schüler Herr Fritz Schütte angefertigt hat, begleite ich gern mit einem empfehlenden Vorworte, nachdem ich sie mit der Originalschrift und den handschriftlichen Zusätzen und Verbesserungen des Herrn Verfassers in Bezug auf ihre Richtigkeit verglichen habe.

Eine Geschichte der Geometrie unserer Zeit, in der jedes Jahrzehnt uns mehr vorwärts bringt, als es früher in einem Jahrhundert geschah, welche uns zu ungeahnten allgemeinen Anschauungen geführt hat, zu besitzen, ist der Wunsch aller Geometer; aber wir wissen auch alle, wie unvergleichlich schwerer die Aufgabe, eine solche zu schreiben, heute ist als vor fünfzig Jahren, wo der *Aperçu historique* von Chasles erschien.

Herr Loria will seine „Chronik", wie er seine Schrift in der Einleitung nennt, nur als eine Vorarbeit angesehen haben, welche zur Inangriffnahme des großen Werkes der Abfassung einer Geschichte der modernen Geometrie anspornen und diesem Werke dienen soll. Der Umfang, den er zunächst seiner Arbeit gegeben hat, bringt es, wie er selbst mehrfach bemerkt, freilich mit sich, daß die Darstellung bisweilen auf eine bloße Aufzählung von Namen und Schriften hinausläuft. Aber auch in diesem engeren Rahmen ist es, meine ich, dem

Verfasser gelungen, dem Leser, als welchen ich mir in erster Linie einen Studierenden vorstelle, der schon etwas über die Anfänge hinaus ist, eine anschauliche Übersicht der hauptsächlichsten Untersuchungsrichtungen der Geometrie unserer Zeit vorzuführen; für alle Geometer aber werden die reichhaltigen Litteraturnachweise von großem Werte sein. Etwaige Lücken in denselben wird jeder, der unsere fast unübersehbare und den wenigsten vollständig zugängliche mathematische Litteratur kennt, dem Verfasser nicht anrechnen, und jede Mitteilung einer wesentlichen Verbesserung oder Ergänzung wird er gewiß gern entgegennehmen, um seine Schrift noch wertvoller zu machen, falls ihr eine neue Auflage beschieden würde.

Die Veränderungen, welche diese Übersetzung im Vergleich mit dem italienischen Originale aufweist, bestehen, außer stark vermehrten Litteraturnachweisen, in einer viel eingehenderen Besprechung der Differentialgeometrie im Abschnitte III und der Umarbeitung der auf die Gestalt der Kurven und der Oberflächen und die abzählende Geometrie bezüglichen Teile der Abschnitte II und III zu einem besonderen Abschnitte.

Münster i. W., Ende Mai 1888.

R. Sturm.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Die Geometrie vor der Mitte des 19. Jahrhunderts	3
II. Theorie der ebenen Kurven	21
III. Theorie der Oberflächen	31
IV. Untersuchungen über die Gestalt der Kurven und Oberflächen. Abzählende Geometrie	60
V. Theorie der Kurven doppelter Krümmung	71
VI. Abbildungen, Korrespondenzen, Transformationen	80
VII. Geometrie der Geraden	98
VIII. Nicht-Euklidische Geometrie	106
IX. Geometrie von n Dimensionen	115
Schluss	124
Abkürzungen für die häufig erwähnten Zeitschriften	130
Verzeichnis der verstorbenen Geometer, deren Lebenszeit angegeben ist	132

Einleitung.

„Après six mille années d'observations l'esprit humain n'est pas épuisé; il cherche et il trouve encore afin qu'il connaisse qu'il peut trouver à l'infini et que la seule paresse peut donner des bornes à ses connaissances et à ses inventions." Bossuet.

Die Fortschritte der exakten Wissenschaft im allgemeinen und der Mathematik im besonderen* sind in diesen letzten Zeiten so beträchtlich gewesen, fortwährend folgen weitere nach, so schnell und unaufhaltsam, daß sich lebhaft das Bedürfnis fühlen macht, einen Rückblick auf den schon gemachten Weg zu werfen, welcher den Anfängern ein leichteres Eindringen in die Geheimnisse derselben und den schon Vorgeschrittenen ein sichereres Urteil gestattet, welches die Probleme sind, deren Lösung am dringendsten ist.

Der Wunsch, diesem Bedürfnisse zu entsprechen, soweit es die Geometrie anlangt, d. h. soweit es den höheren Teil

* „It is difficult to give an idea of the vast extent of modern mathematics. This word „extent" is not the right one: I mean extent crowded with beautiful detail — not an extent of mere uniformity such as an objectless plain, but of a tract of beautiful country seen at first in the distance, but which will bear to be rambled through and studied in every detail of hillside and valley, stream, rock, wood and flower." (Rede von Cayley i. J. 1883 vor der „British Association for the Advancement of Science" gehalten.)

Bei dieser Gelegenheit führen wir noch folgendes Urteil von E. Dubois-Reymond über den Charakter der modernen Wissenschaft an: „Nie war die Wissenschaft entfernt so reich an den erhabensten Verallgemeinerungen, nie stellte sie in ihren Zielen, ihren Ergebnissen eine grössere Einheit dar. Nie schritt sie rascher, zweckbewußter, mit gewaltigeren Methoden voran, und nie fand zwischen ihren verschiedenen Zweigen lebhaftere Wechselwirkung statt." (*Über die wissenschaftlichen Zustände der Gegenwart,* Reden, Bd. II, S. 452.)

unserer positiven Kenntnis betrifft — da, wie Pascal sagte, tout ce qui passe la géométrie nous surpasse — ist es, der mich veranlaßt, vorliegende Abhandlung zu schreiben.

Möge dieser unvollkommene Abriß die Veranlassung sein zu einer Schrift, die der Erhabenheit ihres Zieles würdig ist; möge diese dürftige Chronik der Vorläufer sein einer „Geschichte der Geometrie in unserem Jahrhundert".

I.

Die Geometrie vor der Mitte des 19. Jahrhunderts.

„Alle Entwickelungsstufen der Zivilisation sind so eng miteinander verknüpft, daß man vergebens versuchen würde, irgend einen Zweig der Geschichte von einer bestimmten Epoche ab zu studieren, ohne einen Blick auf die vorhergehenden Zeiten und Ereignisse zu werfen.“ [1]) Wenn das im allgemeinen wahr ist, so wird es doppelt der Fall sein „bei einer Wissenschaft, die so konservativ ist, wie die Mathematik, welche das Werk der vorhergehenden Periode nicht zerstört, um an dessen Stelle neue Bauten zu errichten“. [2]) Daher ist es unerläßlich, daß ich, bevor ich an das eigentliche Thema dieser Abhandlung herantrete, d. h. bevor ich über die moderne Geometrie spreche, kurz angebe, auf welche Weise die Geometrie zu dem Standpunkte gelangt ist, von welchem ab ich vorhabe, ihre Entwickelung eingehender zu verfolgen.

Den ersten Ursprung der geometrischen Untersuchungen festzustellen, ist ein fast unausführbares Unternehmen. Die täglichen Erfahrungen jedes denkenden Menschen führen auf eine so natürliche Weise zur Vorstellung der einfacheren geometrischen Formen und zur Erforschung ihrer gegenseitigen Beziehungen, daß man vergebens versuchen würde, den Namen desjenigen zu nennen, der zuerst Geometrie betrieben hat, und anzugeben, zu welcher Zeit sie entstanden ist. Daher sind die Kenntnisse, welche man über die ersten Spuren dieser Disziplin hat, sehr unbestimmt; wer sich vor-

1) *Histoire des sciences mathématiques en Italie* par G. Libri, 1838. Bd. I, S. 3.

2) Hankel, *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (Tübingen. II. Aufl. 1885). S. 7.

nimmt, sie festzustellen, den umhüllt, wenn nicht völlige Finsternis, so doch nur ein wenig Dämmerlicht, welches ihm nur gestattet, die Umrisse bedeutenderer Bruchstücke, welche sich den Unbilden der Zeit entzogen haben, zu erkennen. So kann ein solcher feststellen, daß die ältesten geometrischen Studien von den Ägyptern gemacht sind, und kann die Erzählung Herodots wiederholen, nach welcher diesem Volke ein sehr wirksamer Antrieb, sich mit Geometrie zu befassen, durch die periodischen Überschwemmungen des Nils gegeben wurde, welche, indem sie die Grenzen zwischen den kleinen Besitzungen, in die Ägypten unter seine Einwohner verteilt war, verwischten, sie nötigten, dieselben jedes Jahr wieder herzustellen.[3]) Die Haltbarkeit dieser Hypothese, um die Thatsache zu erklären, daß in Ägypten die Wissenschaft, von der wir handeln, eifrig betrieben sei, wird durch die praktische Natur der Gegenstände bewiesen, welche dort eingehender behandelt wurden: specielle Konstruktionen, Messungen von Längen, Flächeninhalten, Volumen u. s. f.[4])

Indem die Kenntnisse der Ägypter nach Griechenland übergingen, erhielten sie durch Thales (640—540)[5]) und die Anhänger der ionischen Schule, welche er gründete, eine wissenschaftlichere Gestalt. Thales ist in der That der erste, der sich damit beschäftigt hat, die von den Ägyptern entdeckten Sätze und einige andere streng zu beweisen. Jedoch erhob sich die Geometrie unter seinen Händen noch nicht zur wahren Wissenschaft; diese Würde erlangte sie erst

3) Diese Thatsache könnte man als ein neues Moment ansehen, wie sich — nach einem berühmten Ausspruche Humboldts — der Einfluß, den die tellurischen Erscheinungen auf die Richtung unserer wissenschaftlichen Untersuchungen ausüben, geltend macht.

4) Vgl. Emil Weyr, *Über die Geometrie der alten Ägypter* (Wien, 1881).

5) Für die Mathematiker, welche vor 1200 gelebt haben, sind die hier niedergeschriebenen Jahreszahlen aus den *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* von M. Cantor (I. Bd. Leipzig, 1880) entnommen. Die erste Zahl in der Klammer bezieht sich auf das Geburtsjahr, die zweite auf das Todesjahr.

durch die Untersuchungen des Pythagoras (nach einigen 569—470, 580—500 nach anderen) und seiner Schüler. Unglücklicher Weise aber bestand eine der Regeln, welche die Pythagoräer strenge beobachten mußten, darin, daß sie die Lehren, welche der Meister vortrug, geheim halten mußten; daher kam es, dass der geometrische Teil derselben allen, die nicht dieser Schule angehörten, unbekannt blieb. Aber nachdem das Haupt gestorben war, da suchten seine Anhänger, als sie bei den inneren Kämpfen, welche die Republiken Grossgriechenlands zerrissen, besiegt worden waren, Zuflucht in Athen und offenbarten dort, von der Not getrieben, die Geheimnisse, welche sie bis dahin so strenge verwahrt hatten. Und der wohlthätige Einfluß einer grösseren Verbreitung dessen, was die Pythagoräer von der Mathematik wußten, ist durch die wichtigen Forschungen offenbar geworden, welche in der Folgezeit die griechischen Gelehrten in der Periode, welche zwischen Pythagoras und Plato (429—348) liegt, gemacht haben. Sie können in drei Kategorien geteilt werden, benannt nach den berühmten Problemen: der Dreiteilung des Winkels, der Verdoppelung des Würfels, der Quadratur des Kreises, und führten zur Vervollkommnung des mehr elementaren Teiles der ebenen Geometrie.

Plato verdanken wir den ersten Anstoß zum methodischen Studium der Stereometrie, und das ist nicht das Einzige, wofür der göttliche Philosoph auf den Dank der Geometer Anspruch erheben könnte; denn ihm ist auch die analytische Methode zuzuschreiben, deren Macht allen bekannt ist, und seiner Schule (Akademie) die Lehre von den Kegelschnitten und, was nicht weniger wichtig ist, die von den geometrischen Örtern.

Aus diesen gedrängten Angaben[6]) wird man leicht entnehmen können, daß die Bemühungen der angeführten Geometer zu einer Fülle von Eigenschaften der Figuren und zu Methoden, sie zu erklären, geführt und die Elemente für eine methodische Behandlung der Geometrie vorbereitet hatten.

6) In Bezug auf größere Einzelheiten sehe man Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (Leipzig, 1870).

Daher dauerte es nicht lange, daß vollständige Zusammenstellungen dessen, was entdeckt war, erschienen. Von vielen kennen wir nur die Existenz; nur eine einzige ist uns vollständig erhalten worden, *die Elemente* des Euklides, und das glänzende Licht, welches von ihnen ausgeht, führt uns zu der Vermutung, daß alle die anderen Zusammenstellungen durch die Vergleichung mit ihnen verdunkelt sind.

Mit diesem Buche, welches nach zweitausend Jahren noch als einzig angesehen wird, „von dem man für die Entwickelung der Jugend diejenigen Resultate erhoffen kann, mit Rücksicht auf die bei allen zivilisierten Nationen der Unterricht in der Geometrie eine solch bedeutende Stellung in der Erziehung der Jugend inne hat“,[7]) nimmt die wahre Wissenschaft der Geometrie ihren Anfang. Es ist das granitene Piedestal, auf welchem der großartige Bau der griechischen Mathematik sich erhebt, auf dessen Gipfel sich die anderen Werke Euklids und die unsterblichen Arbeiten von Archimedes (287—212), Eratosthenes (276—194) und Apollonius (ca. 200 v. Ch.) befinden.[8])

Diese berühmten Gelehrten bezeichnen den Höhepunkt der griechischen Wissenschaft; nach ihnen beginnt die Periode des Verfalles, ja sogar, trotz einiger wichtiger Untersuchungen eines Hipparch (161—126) und eines Ptolomaeus (125 bis ungefähr 200), trotz der Arbeit eines genialen Kommentators, wie Pappus war (derselbe lebte gegen Ende des

---

7) Betti und Brioschi, Vorrede zu *Gli elementi di Euclide* (Florenz, 1867). Eine gegenteilige Ansicht hat Lacroix in seinem wohlbekannten Buche *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* (4. Aufl. 1883. S. 296) ausgesprochen.

8) Um zu zeigen, wie glänzend und bewunderungswürdig die noch immer verkannte griechische Mathematik gewesen sein muß, genüge es, die Thatsache anzuführen, daß die Theorie der Kegelschnitte, ein hauptsächlicher Gegenstand des Studiums der alten Geometer, von ihnen zu solcher Vollendung gebracht wurde, dass man im wesentlichen nur weniges hinzuzufügen hätte, um sie auf den Stand zu bringen, auf dem sie sich heute befindet. Die Bewunderung für ene wird noch jeden Tag grösser durch die historischen Forschungen

dritten Jahrhunderts unserer Zeitrechnung), kommen wir nach und nach zu einer Periode völliger Unthätigkeit auf dem Gebiete der Geometrie.

Die Römer, die Eroberer und Gesetzgeber der Welt, scheinen jedes Untersuchungsgeistes zu entbehren, und wenn die Geometrie in der Epoche, in welcher sie herrschten, nicht ganz verfiel, so geschah das dank ihren Agrimensoren, welche jedoch bei ihren Operationen nur eine Genauigkeit zu erreichen suchten, die für die Bedürfnisse des täglichen Lebens ausreicht.[9])

---

gelehrter Mathematiker [z. B. Zeuthen (s. das Werk *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertume,* deutsch von Fischer-Benzon. Kopenhagen, 1886), P. Tannery (s. *Bull. des scienees math.* und *Mém. de la Société de Bordeaux*) und andere], welche das Vorurteil zu beseitigen suchen, daß die Griechen keine Untersuchungsmethoden gehabt hätten, die vergleichbar sind mit denen, auf welche unsere Zeit so stolz ist, und die als Ersatz dafür die Ansicht aufzustellen streben, daß es ihnen nur an den nötigen Formeln zur Darstellung der Methoden selbst gefehlt habe.

9) Ich kann nicht umhin, die beredten Worte, welche der berühmte Geschichtsschreiber der Mathematik in Italien bei dieser Gelegenheit geschrieben hat, anzuführen: „..... mais bientôt le Romain arrive, il saisit la science personnifiée dans Archimède, et l'étouffe. Partout où il domine la science disparaît: l'Étrurie, l'Espagne, Carthage en font foi. Si plus tard Rome n'ayant plus d'ennemis à combattre se laisse envahir par les sciences de la Grèce, ce sont des livres seulement qu'elle recevra; elle les lira et les traduira sans y ajouter une seule découverte. Guerriers, poètes, historiens, elle les a, oui; mais quelle observation astronomique, quel théorème de géométrie devons-nous aux Romains?“ (Libri a. O. S. 186.)

Um zu zeigen, in welchem Ansehen unsere Vorfahren die Mathematik hielten, genüge es mitzuteilen (vgl. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter,* Leipzig, 1874. S. 103), daß sie dieselbe oft mit Astrologie und den verwandten Künsten zusammenwarfen. Es darf uns daher nicht Wunder nehmen, wenn wir in dem Codex Justinians unter den gesammelten Bestimmungen unter dem Titel „De maleficis et mathematicis et ceteris similibus“ folgendes finden: „Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino.“ Wenn man in demselben Codex etwas weiter die Wendung findet: „Artem geometriae discere atque exercere publice interest,“ so muß

Auch das Mittelalter kann keine Veranlassung geben zu einer längeren Erörterung. Die dichte Finsternis, welche in dieser Zeit die ganze Menschheit bedeckte, gestattete nicht das Auftreten eines Gelehrten, dem man irgend einen bemerkenswerten Fortschritt in der Geometrie verdankt. Man kann nur erwähnen, daß die vielfachen in dieser Zeit errichteten heiligen Bauwerke, die nach dem Ausspruche eines großen Dichters so zahlreich und kühn waren, weil sie die einzigen der menschlichen Intelligenz damals erlaubten Äußerungen darstellen, Kunde davon geben, daß derjenige Teil unserer Wissenschaft, der jedem Baumeister unentbehrlich ist, auch in dieser Zeit im allgemeinen bekannt war.

Diese für unsere Wissenschaft so traurige Zeit kann man als beendet ansehen mit Leonardo Fibonacci (etwa 1180—1250); erst als von diesem ausgezeichneten Gelehrten die Algebra nach Europa übergeführt worden war, und seine hervorragenden Arbeiten ihren Einfluß ausübten, da hatte diese Periode der wissenschaftlichen Unthätigkeit ein Ende, und es beginnt eine neue Zeit, deren wir Italiener uns mit Stolz erinnern müssen, da in ihr unser Vaterland das Scepter der Mathematik inne hatte. Jedoch gravitierte diese Periode, wenn sie auch von großer Bedeutung für die analytischen Untersuchungen ist, nicht in merklicher Weise nach den geometrischen. Cardano (1501—1576), Scipio Ferro (?—1525), Tartaglia (1500—1559), Ludovico Ferrari (1522—1565) und andere weniger bedeutende, die dieser Periode angehören, haben den Ruhm, in unserem Lande die Entwickelung eines der wichtigeren Teile der Analysis, nämlich der Theorie der Gleichungen, bewirkt zu haben, sowie auch die Vervollkommnung einiger der schwierigsten Teile derselben gefördert zu haben, dank den öffentlichen wissenschaftlichen Herausforderungen, welche eine charakteristische Eigentümlichkeit dieser Zeit waren. Hingegen überlieferten

man sich hüten, sie als eine Übersetzung des Ausspruches Napoleons I. anzusehen: „L'avancement, le perfectionnement des Mathématiques sont liés à la prospérité de l'État," denn es ist fast sicher, daß der römische Gesetzgeber den praktischen Teil der Geometrie meinte.

sie die Geometrie ihren Nachkommen fast in demselben Zustande, in welchem sie dieselbe von den Griechen und den Arabern erhalten hatten.[10])

Nach dem Tode dieser tapferen Kämpen ging der Primat in der Mathematik über die Alpen und wurde von Frankreich infolge der Verdienste eines Vieta (1540—1603) und eines Fermat (1590—1663) übernommen. Durch sie bereicherte sich die Geometrie mit Lösungen, die man vorher vergebens gesucht hatte. Auch wurden einige Werke des Apollonius, deren Verlust man beklagt hatte, wieder hergestellt.

Nicht viel später vermehrten Pascal (1623—1662) und Desargues (1593—1662) das Erbteil der Geometrie mit originellen Gesichtspunkten, mit neuen Methoden und neuen Sätzen[11]). Aber die von ihnen ausgesprochenen Ideen blieben

10) Unter den Fragen der Geometrie, welche die italienischen Gelehrten des 16. Jahrhunderts sich gegenseitig stellten, finden sich solche von einiger Wichtigkeit, da sie die *„Geometria del compasso"* (Geometrie des Kreises) entstehen ließen, welcher gerade in dieser Zeit Benedetti (?—1590) eine Schrift widmete, und die in neuerer Zeit von Mascheroni (1750—1808) und Steiner gepflegt wurde.

11) Pascal entdeckte an der Cykloide eine Fülle bemerkenswerter Eigenschaften, wies auf die Perspektivität als eine für das Studium der Kegelschnitte sehr günstige Methode hin, bewies den berühmten Lehrsatz von dem „Hexagramma mysticum," wie er es nannte, u. s. w.

Desargues führte die gemeinsame Betrachtung der drei Kegelschnitte ein, den wichtigen Begriff des unendlich fernen Punktes einer Geraden, den Begriff der Involution von sechs Punkten, löste mehrere wichtige Fragen, die sich auf die Kegelschnitte beziehen, u. s. w.

In den Werken von Desargues (vgl. die von Poudra 1864 besorgte Ausgabe) findet sich auch eine Methode vorgeschlagen, um einige projektive Eigenschaften der Kurven zu untersuchen, welche darauf beruht, daß man dieselbe durch Systeme von Geraden ersetzt. Descartes und Poncelet betrachteten die Schlüsse, die auf einer solchen Substitution beruhen, als der Strenge entbehrend (vgl. *Traité des propriétés projectives*, Bd. II, S. 128). Jedoch wurde das von Desargues vorgeschlagene Verfahren in der neueren Zeit wiederholentlich von demselben Poncelet (a. a. O. Bd. I, S. 374), von Jonquières (in verschiedenen Abhandlungen in den *Annali di Matem., Journ. f. Math.* und in den *Math. Ann.*), von Cremona (s. die *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*) gebraucht, und gehört heute zu den wertvollen Untersuchungsmethoden, die wir dem „Prinzip der Erhaltung der Anzahl" verdanken.

viele Jahre hindurch unfruchtbar, weil sie von dem analytischen Geiste, dessen überwiegender Einfluß sich schon geltend gemacht hatte, unterdrückt wurden.

Gleichwohl war im 17. Jahrhundert das Vorwiegen der Analysis noch nicht ein solches, daß es die Geometer die Probleme, deren Lösung man seit langer Zeit und so lebhaft gewünscht hatte, vergessen ließ. Zwischen den Bestrebungen dieser Zeit und den Wünschen der Gelehrten erhob sich in der Folge ein Wettkampf eigener Art, und aus dem Zusammenstoße verschiedenartiger Ansichten und Bestrebungen entsprang ein Funke, der fähig war, eine Flamme zu erregen, welche die kommenden Generationen erleuchten sollte;[12]) es entstand die analytische Geometrie (1637).

Wenn man auch schon in einigen Methoden der griechischen Geometer, in einigen praktischen Regeln der Maler, der ägyptischen Astronomen und der römischen Agrimensoren Spuren von dem finden kann, was wir heute rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem nennen; wenn auch schon die Araber und die italienischen Algebraiker aus der Renaissancezeit geometrische Betrachtungen auf die Lösung der Gleichungen angewandt hatten,[13]) wenn auch schon Vieta die Abscissen gebraucht hatte, um vermittelst Zahlen die Punkte einer Geraden zu bestimmen, wenn schließlich Nicolaus Oresme (ca. 1320—1382) und Fermat mehr oder weniger bewußt sich der Koordinaten bedient haben; so scheint doch ganz unbestreitbar Descartes (1596—1650) der erste zu sein, welcher in ihrer ganzen Ausdehnung die volle Einsicht von der Möglichkeit, mit den algebraischen Rechnungszeichen die nach irgend einem Gesetze aufgebauten Formen des Raumes darzustellen, gehabt und der den ganzen Vorteil, den die Analysis und die Geometrie aus ihrer un-

---

12) Vgl. E. Dubois-Reymond, *Kulturgeschichte und Naturwissenschaft,* in den *Gesammelten Reden,* Bd. I 1886, S. 207—208.

13) Favaro, *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni. Memorie di Modena,* 18, 1879.

Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* (Leipzig, 1878), 7. Abschnitt.

erwarteten Vereinigung ziehen können, erkannt hat. Mit Recht wird daher Cartesius' Namen immer mit der Entdeckung der analytischen Geometrie verbunden bleiben.[14])

Die Leichtigkeit, mit welcher dieses neue Werkzeug Fragen zu lösen gestattete, welche die Alten für unangreifbar hielten, ließ die Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger Descartes' die von Euklides, Archimedes und Apollonius eröffneten Wege ganz vergessen, so dass wir eine Zeitlang niemanden finden, der, um zu irgend einer wichtigen Wahrheit zu gelangen, sie eingeschlagen hätte.

Die kurz nach Descartes gleichzeitig von Leibniz (1646—1716) und Newton (1642—1727) neu erfundenen Rechnungsarten betonten gerade diese Richtung, da sie bewirkten, daß man sich um diejenigen Probleme nicht bekümmerte, deren Lösung nicht geeignet war, die Allmacht der Methoden, welche die Welt diesen unsterblichen Geistern verdankt, hervortreten zu lassen, derartig, daß man sagen kann, daß mit Ausnahme der *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686) von Newton und einiger Seiten von Huygens (1629—1695),[15]) von La Hire (1640—1718),[16]) von Halley (1656—1742),[17]) Maclaurin (1698—1746),[18]) Simpson (1687—1768),[19]) von Stewart

14) Über den Ursprung der analytischen Geometrie sehe man Günther, *Die Anfänge und die Entwickelungsstadien des Coordinatenprincipes (Abhandlungen der naturforsch. Gesellsch. zu Nürnberg,* 6) und über Cartesius die Rede von Jacobi, ins Französische übersetzt und veröffentlicht in *Liouvilles Journ.* 12 unter dem Titel: *De la vie de Descartes et de sa méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences.*

15) Siehe z. B. den *Traité de la lumière* (Leyden, 1691).

16) *Sectiones conicae in novem libros distributae* (Paris, 1685), *Mémoires sur les Epicycloides* (*Anciennes Mémoires de l'Académie des sciences,* 9), *Traité des roulettes* etc. (ebendas., 1704).

17) Man sehe die von ihm bewirkte Herausgabe von griechischen Werken nach, sowie seine Versuche, verloren gegangene Bücher (wie das achte Buch von Apollonius' Kegelschnitten) wieder herzustellen.

18) Vergl. sein Buch *A complete System of Fluxions* (Edinburgh, 1742).

19) *Treatise on conic Sections* (1735).

(1717—1785)[20]) keine mathematische Produktion jener Zeit dem angehört, was wir heute synthetische Geometrie zu nennen pflegen.[21])

Das hindert aber nicht, daß man diese Periode ohne Bedenken zu den erfreulichsten für die Geometrie rechnen muß. In der That ist der größere Teil der Probleme, welche von den Erfindern der Infinitesimalrechnung und ihren unmittelbaren Schülern aufgestellt oder gelöst worden, unter die wichtigsten der ganzen Geometrie zu rechnen, da sie die interessantesten und verstecktesten geometrischen und mechanischen Eigenschaften der Kurven und Oberflächen berühren. Wir sehen daher, daß nicht allein die Zahl der Kurven, welche einer näheren Betrachtung wert sind, sich ausserordentlich vermehrt,[22]) sondern auch — was viel wichtiger ist —, daß die Betrachtung von Singularitäten einer Kurve und anderer neuer mit dieser verbundener Elemente eingeführt wird, und daß infolge dessen Untersuchungsgebiete sich eröffnen, deren Existenz man vorher gar nicht geahnt hatte.

Die Leichtigkeit, welche die Cartesische Methode in der Auflösung einer so großen Anzahl von planimetrischen Aufgaben mit sich brachte, trieb natürlich die Geometer an,

---

20) *General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics* (Edinburgh, 1746); *Propositiones geometricae more veterum demonstratae* (Edinburgh, 1763).

21) Hinsichtlich der von Simpson und Stewart gemachten Versuche, die griechische Geometrie wieder aufleben zu machen, sehe man Buckle, *Geschichte der Civilisation in England* (deutsch von A. Ruge), Bd. 1, Kap. 5.

22) Die von den Griechen hauptsächlich untersuchten Kurven sind: der Kreis, die Ellipse, die Hyperbel, die Parabel, die Archimedische Spirale, die Diokles'sche Cykloide, die Konchoide des Nikomedes, die Quadratrix des Hippias und Dinostratus, die Schraubenlinien, die Spirallinien und einige andere. Zu diesen fügten die neuen Rechnungsarten hinzu: das Folium und die Ovale von Descartes, die Tschirnhausensche Quadratrix, die Cykloide, die Hypo- und Epicykloiden, die logarithmische Spirale, die Kettenlinie, die Sinuscurve, die Logarithmuscurve und unzählige andere.

eine ähnliche für das Studium der Raumkurven und der Oberflächen zu schaffen. Daher entstand eine Verallgemeinerung dieser Methode, welche Descartes schon angedeutet hatte, und die Schooten (16..—1661)[23]) in weiterer Ausführung veröffentlichte. Diese Andeutungen ließen bei Parent (1666—1716) den Gedanken entstehen, eine Oberfläche durch eine Gleichung zwischen den drei Koordinaten eines ihrer Punkte darzustellen,[24]) und bereiteten deshalb die analytische Geometrie dreier Koordinaten vor, welche im Jahre 1731 einen wesentlichen Teil der Mathematik zu bilden begann infolge einer klassischen Abhandlung von Clairaut (1715—1765),[25]) in welcher er im Alter von nur 16 Jahren mit einer seltenen Eleganz viele von den auf die Kurven doppelter Krümmung bezüglichen Problemen löste, welche ihre entsprechenden in der Ebene finden. Bald nach Clairaut schuf Euler (1707—1783) die analytische Theorie der Krümmung der Oberflächen (1760)[26]) und wandte die analytische Methode an, um eine Klassifikation der Oberflächen zweiten Grades zu erhalten, gegründet auf analoge Kriterien, wie diejenigen, welche den Alten dazu gedient hatten, die Kurven zweiter Ordnung in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln zu unterscheiden. Endlich gehört der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts das riesige Werk von Monge (1746—1818) an. Dieser verschaffte der analytischen Geometrie zweier Koordinaten das Aussehen, welches sie heute besitzt, indem er den methodischen Gebrauch der Gleichung einer Geraden einführte. Er stellte den wichtigen Begriff von Flächenfamilien auf und, indem er einige derselben behandelte (Regelflächen, abwickelbare, Röhrenflächen, „Surfaces moulures"), entdeckte er einen versteckten innigen Zusammenhang zwischen der Theorie der Oberflächen und der Integration der partiellen Differentialgleichungen,

23) Siehe das fünfte Buch seiner *Exercitationes geometricae.*

24) Parent, *Essai et Recherches de Mathématiques et de Physique* (II. Aufl. 1713), Bd. 2.

25) *Traité de Courbes à double courbure.*

26) *Recherches sur la courbure des surfaces (Berliner Abh.).*

was Licht in diese, wie in jene Lehre brachte und den Geometern neue Gesichtspunkte enthüllte.[27])

Die geistige Bewegung, welche mit der Renaissancezeit begonnen und Italien an ihrer Spitze hatte, pflanzte sich, wie wir schon gesehen haben, zuerst unter Frankreichs Leitung fort, dann unter der von England und Deutschland. Aber gegen Ende des 18. Jahrhunderts, als Euler aufgehört hatte „zu rechnen und zu leben",[28]) stellte sich Frankreich wieder an die Spitze der mathematischen Welt. Nicht allein mit Clairaut, d'Alembert (1716—1783), Lagrange (1736—1813), Laplace (1749—1827), Legendre (1752—1833), Poisson (1781—1840) und anderen gab es den Anstoß zum Studium der reinen und angewandten Analysis, sondern es kehrten auch mit Monge, Carnot (1753—1823) und Poncelet (1788—1867) die Gelehrten zum Studium der geometrischen Formen zurück, in der Weise, wie es die Alten verstanden.

Monge schuf, indem er zu einem wissenschaftlichen Ganzen die wenigen Regeln vereinigte, welche die Baumeister und Maler sich geschaffen hatten, um die Bedürfnisse der Kunst zu befriedigen, und glücklich die Lücken ausfüllte, die sich zwischen ihnen noch bemerkbar machten, einen neuen Zweig der Geometrie, die darstellende Geometrie. Mit seinem klassischen Buche, welches er dieser Disziplin widmete,[29]) und noch viel mehr mit seinen unvergleichlichen Vorlesungen, die er an der polytechnischen Schule hielt, brachte er das Studium der Geometrie, welches sich auf die direkte Anschauung der Figur stützt, zu Ehren[30]) und, indem

27) Abhandlungen der Akademie von Turin (1770—1773) und von Paris (1784); *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie* (Paris, 1795), oder *Applications de l'Analyse à la Géométrie* (Paris, 1801).

28) Ausspruch von d'Alembert.

29) *Leçons de géométrie descriptive* (Paris, 1794).

30) In Bezug auf Monge sehe man Dupin, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge* (Paris, 1819); Arago, *Notices biographiques.*

Über die Geschichte des Ursprunges und der Entwickelung der darstellenden Geometrie sehe man den ersten Abschnitt des 1. Bandes

er die Vorstellung der geometrischen Figuren von drei Dimensionen erleichterte, machte er jene systematische Anwendung von stereometrischen Betrachtungen auf das Studium der ebenen Figuren möglich, welche Pappus schon erkannt hatte.[31])

Der *Géométrie descriptive* von Monge darf man die *Géométrie de position* von Carnot[32]) an die Seite stellen, weil diese, indem sie mit jener das Ziel gemeinsam hat, der Geometrie diejenige Allgemeinheit zu verschaffen, welche man ausschließlich der Analysis zugetraut hatte, nicht weniger als jene dazu beitrug, den Aufschwung der reinen Geometrie vorzubereiten, welchen man von dem Erscheinen des *Traité des propriétés projectives des figures* (1822)[33]) datieren kann.

Um zu überzeugen, wie bemerkenswert dieses Datum sei, wird es genügen, zu erwähnen, daß gerade in dem

des Werkes von Chr. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Leipzig, 1884, 1887), in welchem der Studierende eine Menge interessanter Einzelheiten finden wird, sei es über die Studien, welche diese Disziplin vorbereiteten, sei es über die Untersuchungen, welche die Nachfolger von Monge gemacht haben.

Monge hatte als Mitarbeiter bei seinem reformierenden Werke einige seiner Kollegen [unter anderen Lacroix (1765—1843) und Hachette (1769—1834)], sowie viele von seinen Schülern an der polytechnischen Schule. Der Kürze halber beschränke ich mich darauf, den anzuführen, „der über die anderen wie ein Adler fliegt", Charles Dupin (1784—1873), vorzüglich wegen seiner klassischen *Développements de géométrie* (1813), die noch von allen gelesen werden müssen, welche auch nur eine mäßige Kenntnis des heutigen Zustandes der Geometrie erlangen wollen.

31) Monge's Einfluß läßt sich noch in den neuesten Arbeiten bemerken; zum Beweise genüge es, die Idee anzuführen, die Schranken, durch welche die Alten die Planimetrie von der Stereometrie getrennt hatten, niederzureißen, und den glücklichen Versuch, den neuerdings (1884) De Paolis in seinen goldenen *Elementi di Geometria* (Turin) gemacht hat, dieselbe auszuführen.

32) „La Géométrie de position de Carnot n'aurait pas, sous le rapport de la métaphysique de la Science, le haut mérite que je lui ai attribué, qu'elle n'en serait pas moins l'origine et la base des progrès que la Géométrie, cultivée à la manière des anciens, a fait depuis trente ans en France et en Allemagne" (Arago, *Biographie de Carnot*).

33) Zweite Auflage, 1865, 1866.

großen Werke von Poncelet die Macht der Zentralprojektion als einer Methode der Demonstration und des Prinzips der Kontinuität als eines Untersuchungsmittels zum ersten Male gezeigt ist;[34]) daß das tiefere Studium der Homologie zweier ebener oder räumlicher Systeme in demselben zum Begriffe der Korrespondenz zwischen zwei Mannigfaltigkeiten zweier oder dreier Dimensionen führte; daß die Kenntnisse der Alten über die Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt und die von der Mongeschen Schule gewonnenen über die Polarität in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, die dort zum ersten Male sich vereinigt finden, das Gesetz der Dualität vorbereiteten, welches, von Snellius (1581—1626)[35]) und Viète[36]) in der sphärischen Geometrie erkannt, bestimmt war, in seiner ganzen Allgemeinheit vier Jahre später von Gergonne (1771—1859)[37]) ausgesprochen zu werden; daß sich schließlich dort jene eleganten Untersuchungen über die Vielecke, die einem Kegelschnitt ein- und einem anderen umbeschrieben sind, finden, die Jacobi (1804—1851), Richelot (1808—1875) und anderen Gelegenheit geben sollten, davon eine der elegantesten Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen zu machen, welche man kennt.[38])

Die Abhandlungen, welche Poncelet der Theorie der harmonischen Mittel, der reciproken Polaren und der Trans-

---

34) Den Ursprung dieses Prinzipes betreffend, sehe man die Note von C. Taylor, *On the history of geometrical continuity (Cambridge Proc.,* 1880 und 1881).

35) *Doctrina triangulorum canonicae* u. s. w. (Leyden, 1627).

36) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII.* (Opera Vietae, 1646).

37) *Gergonnes Ann.* 17.

38) Jacobi, *Journ. für Math.* 3; Richelot, das. 5, 38; Rosanes und Pasch, ebendas. 64; Léauté, *Comptes rendus,* 79; Fergola, Padeletti und Trudi, *Napoli Rend.* 21; Simon, *Journ. für Math.* 81; Gundelfinger, das. 83; Halphen, *Liouvilles Journ.* III, 5; *Bull. de la Soc. philom.* VII, 3. Man sehe auch die interessante Abhandlung von Hurwitz: *Über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme (Math. Ann.* 15) und die Note von Forsith, *On in- and circumscribed polyhedra* (*Proc. Math. Soc.* 1883).

versalen widmete, sowie andere weniger bedeutende von Gelehrten, welche zur Mongeschen Schule gehörten, führen uns zum Jahre 1837, in welchem Chasles' (1796—1880) *Aperçu historique sur l'origine et el développement des méthodes en géometrie*[39]) veröffentlicht wurde. In diesem unübertrefflichen Werke brachte der Autor, nachdem er in bewunderungswerter Form alles, was das Erbteil der reinen Geometrie in seiner Zeit bildete, zusammengestellt hatte, die Rechte zur Geltung, die sie auf die Beachtung der Gelehrten hatte und welche von den blinden Anbetern der Analysis ihr versagt worden waren, und zeigte durch wichtige und originelle Untersuchungen, mit welchem Rechte er sich zum Beschützer der Sache der Geometrie gemacht hatte.[40])

Jedoch in dem Zeitraume, welcher zwischen dem Erscheinen des Ponceletschen Werkes und desjenigen von Chasles liegt, hatte sich Deutschland aus dem Schlafe gerüttelt, in welchen die einschläfernden Arbeiten der Schule

39) In deutscher Übersetzung von Sohncke: *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich in Bezug auf die neueren Methoden* (Halle, 1839), jedoch ohne das *Mémoire sur deux principes généraux de la science* (vgl. die folgende Note). Das französische Original erschien 1875 in 2. Auflage.

40) Unter den Arbeiten, welche das Werk von Chasles bilden, verdient eine besondere Erwähnung die Abhandlung (für welche ursprünglich der *Aperçu historique* als Einleitung dienen sollte) *Sur deux principes généraux de la Science,* welche die allgemeine Theorie der Homographie (Kollineation) und der Reciprocität enthält, sowie die Untersuchung der beiden Fälle, in welchen diese involutorisch ist, und die Anwendung dieser Transformationen auf das Studium der Flächen zweiten Grades und der geometrischen Oberflächen überhaupt, sowie auf die Verallgemeinerung des cartesischen Koordinatensystems. Auch müssen noch die *Noten* erwähnt werden, da sie eingehende historische Studien und geometrische Untersuchungen von großer Bedeutung enthalten. Unter den letzteren will ich diejenigen anführen, in denen die Theorie des Doppel- oder anharmonischen Verhältnisses und der Involution, die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte, die Fokaleigenschaften der Flächen zweiten Grades, viele Lehrsätze über die kubischen Raumkurven, glückliche Versuche, die Sätze von Pascal und Brianchon auf die Flächen zweiten Grades auszudehnen, eine Verallgemeinerung der stereographischen Projektion u. s. w. auseinandergesetzt sind.

der Kombinatoriker es versetzt hatten. Dieses Wiedererwachen bedeutete einen neuen Übergang des Szepters der Mathematik von Frankreich nach Deutschland.[41]) In der That sehen wir durch die Arbeiten von Gelehrten wie Möbius (1790 — 1868),[42]) Steiner (1796 —

41) Dieser Übergang ging nicht friedlich von statten, war vielmehr mit einer Reihe lebhafter Diskussionen verbunden, in welchen Poncelet, Chasles und Bobillier zu Gegnern hatten Plücker, Steiner und Magnus und deren Hauptschauplatz das *Bulletin* von Férussac war. — Hier würde es am Orte sein, den Anteil zu bestimmen, der jedem dieser Gelehrten in den Wissensgebieten zukommt, an denen sie zusammen arbeiteten; aber dafür würde die Feder eines competenteren und gelehrteren Mannes, als ich bin, nötig sein. Im Übrigen sind nach meinem Dafürhalten gewisse Produktionen der menschlichen Intelligenz eine natürliche Frucht ihrer Zeit; daher darf es nicht wunder nehmen, wenn sie gleichzeitig aus verschiedenen Köpfen hervorgegangen scheinen, und darum braucht man auch keine Erklärung dieser Thatsache in der „mala fides" dieses oder jenes zu suchen. Daß solches wirklich bei der Erfindung der Differentialrechnung eingetreten ist, steht heute außer allem Zweifel. Daß dies ebenso bei der modernen Geometrie eingetreten ist, kann die Thatsache beweisen, daß dieselbe hervorgegangen ist aus einem allseitig gefühlten Bedürfnisse (man vergleiche dazu den Ausspruch Dupins *[Développements de géométrie]*, der als Motto auf dem *Traité des propriétés projectives des figures* steht, mit der Vorrede der *Systematischen Entwickelung* und mit dem *Aperçu historique* an verschiedenen Stellen) nach allgemeinen Methoden, die als Ariadnefaden dienen sollten zur Führung in dem Labyrinthe von Hilfssätzen, Lehrsätzen, Porismen und Problemen, die von den Vorfahren überliefert sind.

42) Die hauptsächlichste Arbeit von Möbius auf dem Gebiete der reinen Geometrie ist die mit dem Titel: *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827); dort sind die bisherigen Kenntnisse über den Schwerpunkt (Barycentrum) eines Systemes von Punkten einer neuen und wichtigen Rechnungsart zu Grunde gelegt; diese führt zu einem neuen Koordinatensystem, dessen Anwendung auf das Studium der Raumkurven und ebenen Kurven und der Oberflächen der Verfasser darlegt. In demselben werden ferner methodisch und in großer Ausführlichkeit wichtige geometrische Transformationen, die heute noch fortwährend Anwendung finden, betrachtet. Viele spätere Abhandlungen von Möbius sind als Anhänge zum barycentrischen Calcul zu betrachten. (Siehe die beiden ersten Bände der *Gesammelten Werke* von Möbius, herausgegeben auf Veranlassung der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig, 1885 — 1887.)

1863),[43]) Plücker (1801—1868)[44]) und von Staudt (1798—1867)[45]) die analytische Geometrie sich mit Methoden bereichern, von denen wir nicht wissen, ob wir mehr ihre Eleganz oder ihre Macht bewundern sollen, so der Barycentrische Calcul und die abgekürzte Bezeichnung; wir sehen die synthetische Geometrie Hilfsmittel erwerben für das Studium der Kurven und Oberflächen, die bis dahin für dieselbe unerreichbar

---

43) Ich meine das Werk: *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin, 1832), in dem „der Organismus aufgedeckt ist, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind". — Die späteren Schriften von Steiner und diejenigen anderer, welche sich auf das angeführte Werk stützen, zeigen, welches Recht der Verfasser desselben dazu hatte, den Inhalt durch die schon angeführten Worte zu charakterisieren. Steiners *Gesammelte Werke* sind auf Veranlassung der Akademie der Wissenschaften zu Berlin herausgegeben (Berlin, 1881, 1882).

44) Des Näheren will ich hier nur die drei Bücher anführen: *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (Essen, 1828—1831), *System der analytischen Geometrie* (Berlin, 1835), *Theorie der algebraischen Kurven* (Bonn, 1839), sowie die mit ihnen zusammenhängenden Abhandlungen, die in *Gergonnes Ann.* und im *Journ. für Math.* veröffentlicht sind.

45) Das Werk, in welchem Staudt sein System der Geometrie dargelegt hat, wurde im Jahre 1847 zu Nürnberg veröffentlicht unter dem Titel: *Geometrie der Lage.* Die ungemeine Knappheit des Stiles ist vielleicht die Ursache der großen Schwierigkeit, auf welche die Verbreitung desselben stieß; heute erst sind, dank den von Reye (in erster Auflage 1866—1868 erschienenen und) unter demselben Titel veröffentlichten Vorlesungen die in demselben enthaltenen Ideen allen bekannt, die sich mit Geometrie beschäftigen. In Italien wird jetzt zuerst von allen Ländern eine Übersetzung desselben angefertigt.

Nicht weniger wichtig sind die *Beiträge zur Geometrie der Lage* (in 3 Heften), welche Staudt seiner *Geometrie der Lage* 1856—1860 folgen ließ. Wir beschränken uns darauf, hervorzuheben, daß dort die einzige strenge, allgemeine und vollständige Theorie der imaginären Elemente in der projektiven Geometrie auseinandergesetzt ist; diese Theorie wurde in verschiedener Weise von mehreren Geometern, Lüroth (*Math. Ann.* 8, 11), August (*Progr. der Friedrichs-Realschule in Berlin,* 1872) und Stolz (*Math. Ann.* 4) erläutert; über die eng mit ihr zusammenhängende Rechnung mit den „Würfen" sehe man außer den erwähnten Abhandlungen von Lüroth noch zwei Arbeiten von Sturm (*Math. Ann.* 9) und Schröder (ebendas. 10).

waren, sowie für die Gründung einer reinen Geometrie der Lage, die ganz und gar unabhängig ist von dem Begriffe des Maßes. Dank dem von Crelle (1780—1855) in dieser Zeit gegründeten Journal (1826), das bald zu verdientem Rufe gelangte, vorzüglich durch die Abhandlungen Abels (1802—1829), Jacobis und Steiners verbreiteten sich die eben angeführten Resultate schnell. Und so sehen wir hinter diesen Größen eine zahlreiche und glänzende Anzahl von Schülern, welche, indem sie Ähren lasen auf den Feldern, die von ihren Meistern bebaut waren, die Fruchtbarkeit des Samens zeigten, den jene ausgestreut hatten.

Hiermit will ich den Abriß der geistigen Bewegung, welche die neuesten geometrischen Untersuchungen vorbereitet hat, geschlossen haben und ich muß mich nun im einzelnen mit denselben befassen. Um mir nun die vorgenommene Aufgabe der Darlegung derselben zu erleichtern, werde ich meine Darstellung in verschiedene Teile teilen. Zuerst will ich mich mit der Theorie der ebenen Kurven und der Oberflächen beschäftigen, dann, nach einer kurzen Abschweifung zu den Untersuchungen über die Gestalt der Kurven und Oberflächen und über die abzählende Geometrie, werde ich mich mit den Studien über die Raumkurven befassen, um davon zur Darlegung des Ursprunges und der Entwickelung der Lehre von den geometrischen Transformationen überzugehen; darauf wende ich mich zur Geometrie der Geraden, um dann mit der Nicht-euklidischen Geometrie und der Theorie der Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen zu schließen.[46])

46) Ohne Zweifel ist diese Einteilung etwas willkürlich; vielleicht wird mancher, indem er bedenkt, daß gewisse Theorien mit demselben Rechte zu mehr als einem von den folgenden Abschnitten gehören können, dieselbe unpassend finden. Gleichwohl schmeichle ich mir, daß die meisten nach reiflicher Prüfung des besprochenen Gegenstandes finden werden, daß die von mir gewählte Einteilung nicht ohne bemerkenswerte Vorteile ist.

II.

Theorie der ebenen Kurven.

Die allgemeine Theorie der ebenen Kurven entstand zugleich mit der cartesischen Geometrie. Es ist leicht die Gründe für die Thatsache anzugeben, daß das Erscheinen einer so wichtigen Theorie sich bis zu diesem Zeitpunkte verzögert hatte. In der That sind ja die Definition der Ordnung einer Kurve, die daraus folgende Einteilung der Kurven in algebraische und transcendente, der exakte Begriff einer in ihrer Ordnung allgemeinen Kurve ihrer Natur nach wesentlich analytische Begriffe. Sie synthetisch zu bestimmen, ist ein sehr schweres Problem, welches heutzutage erst den wiederholten Anstrengungen der Geometer zu weichen sich anschickt; dagegen, wenn man ein Koordinatensystem anwendet, eine wie leichte Sache ist es dann, diese fundamentalen Begriffe festzustellen, sie unter einander zu verbinden und aus ihnen interessante Folgerungen zu ziehen!

Die Wahrheit dieser Behauptung finden wir durch die Thatsache bestätigt, daß kurz nach Descartes wichtige Eigenschaften, die allen algebraischen Kurven gemeinsam sind, entdeckt wurden. Solche sind z. B. diejenigen, welche Newton in den drei berühmten Theoremen, die in seiner *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706) enthalten sind, bekannt gemacht hat; ferner diejenigen, welche Newtons Schüler Cotes (1682—1716) und Maclaurin als eine Verallgemeinerung der von Newton entdeckten Eigenschaften gaben;[1])

1) Côtes, *Harmonia mensurarum* (1722); Maclaurin, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus.* (Ins Französische übersetzt von de Jonquières und seinen *Mélanges de Géométrie pure* [Paris, 1856] angehängt.)

schließlich die von Waring (1734—1798)[2]) gefundenen. Überdies wurden noch von Maclaurin[3]) und Braikenridge (etwa 1700, † nach 1759)[4]) einige interessante organische Erzeugungsweisen von Kurven hinzugefügt, die ähnlich denjenigen waren, welche Newton für die Kegelschnitte gegeben hat.[5]) Endlich wurden von De Gua (1712—1786)[6]) Methoden für die Bestimmung der Singularitäten der durch Gleichungen definierten ebenen Kurven angegeben.

Es ist überflüssig zu sagen, daß die ersten methodischen Bearbeitungen der Theorie der ebenen Kurven unter dem Einflusse der analytischen Geometrie stehen; wir verdanken solche Euler[7]) und Cramer (1704—1752)[8]). Diese studierten dieselben von Grund auf (kurz nacheinander, der eine 1748, der andere 1750), indem sie sich vorzugsweise mit den Singularitäten befaßten, besonders mit den Fragen, welche man heute mit Hilfe der Geometrie des unendlich Kleinen löst. In dem Werke von Cramer, das in vielen Beziehungen zu bewundern ist, finden wir auch schon die ersten Untersuchungen über die Schnitte von Kurven und unter diesen auch den Hinweis auf das, was man später „das Cramersche Paradoxon" genannt hat; das ist jener scheinbare Widerspruch zwischen der Zahl der Punkte, die zur Bestimmung einer Kurve von gegebener Ordnung nötig

---

2) *Miscellanea analytica* etc. (1762); *Proprietates geometricarum curvarum* (1772); *Phil. Trans.* 1763—1791.

3) *Geometria organica* (1720).

4) *Phil. Trans.* 1735; *Exercitationes Geometriae de descriptione linearum curvarum* (1738).

5) Übrigens hat, wie C. Taylor (*Cambridge Proc.* 3) bemerkte, Newton selbst seine organische Erzeugungsweise der Kegelschnitte in der *Enumeratio linearum tertii ordinis* auf Kurven höherer Ordnung ausgedehnt.

6) *Usage de l'analyse de Descartes* (1740).

7) *Introductio in analysin infinitorum.* 2. Bd.

8) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.*

sind, und der Zahl der Schnitte zweier Kurven derselben Ordnung,[9]) ein Widerspruch, welcher viele Jahre später (1818) von Lamé (1795—1870) durch das berühmte Prinzip aufgehoben wurde, welches seinen Namen trägt und das man als den Grundstein jenes gewaltigen Bauwerkes ansehen muß, welches aus einer Fülle von Lehrsätzen von Gergonne,[10]) Plücker,[11]) Jacobi,[12]) Cayley[13]) errichtet ist, und auf dessen Gipfel die geometrische Interpretation des berühmten Abelschen Theorems[14]) steht.

Nach den Arbeiten Eulers, Cramers und dem *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, in welchem Lamé mit großem Erfolge das vorhin angeführte Prinzip auseinandergesetzt und angewandt hatte, müssen wir uns zu Plücker wenden, um zu Arbeiten zu kommen, welche einen bemerkenswerten Fortschritt in der Theorie, die uns beschäftigt, bewirken. In dem im Jahre 1835 von diesem ausgezeichneten Geometer veröffentlichten *System der analytischen Geometrie* ist von der Methode der abgekürzten Bezeichnung Gebrauch gemacht und dieselbe für die Vervollständigung der Klassifikation der kubischen ebenen Kurven benutzt worden, welche so viele bedeutende Gelehrte unternommen hatten. In der vier Jahre später gedruckten

---

9) Kurz vor der Veröffentlichung des Cramerschen Werkes fand Euler (man sehe die *Berliner Abh.* 1748), daß von den neun Grundpunkten eines Büschels ebener Kurven dritter Ordnung einer durch die acht übrigen bestimmt ist.

10) *Gergonnes Ann.* 17, 19.

11) *Journ. für Math.* 16; *Theorie der algebraischen Curven* (wo S. 12—18 sich eine kurze Geschichte dieser Sätze findet).

12) *Journ. für Math.* 15.

13) *Cambridge Journ.* 3; vgl. Bacharach, *Math. Ann.* 26.

14) Riemann, *Journ. für Math.* 54; Clebsch, das. 58; Roch, ebendas. 64; Clebsch und Gordan, *Theorie der Abelschen Funktionen* (Leipzig, 1866); Brill und Nöther, *Über die algebraischen Funktionen* u. s. w. (*Math. Ann.* 7); Cremona, *Bologna Mem.* 1870; Casorati, Cremona und Brioschi, *Lombardo Rend.* II, 2.

Theorie der algebraischen Kurven[15]) findet sich dann noch außer einer Aufzählung der ebenen Kurven vierter Ordnung,[16]) welche Bragelogne (1688—1744)[17]) und Euler[18]) nur versucht hatten, die Aufstellung und Lösung einer Frage von sehr großer Wichtigkeit, derjenigen nämlich, die Beziehungen zwischen den Zahlen der gewöhnlichen Singularitäten einer ebenen Kurve zu finden. Schon Poncelet hatte (1818) den Zusammenhang zwischen der Ordnung und der Klasse einer allgemeinen Kurve ihrer Ordnung gefunden und später den Einfluß eines Doppelpunktes bestimmt; indem er nun auf diese Resultate das Prinzip der Dualität anwandte, stieß er auf jenen anderen scheinbaren Widerspruch, welchen wir heute das Ponceletsche Paradoxon nennen, ohne daß es ihm gelang, dafür eine vollständige Erklärung zu finden. Das geschah durch Plücker vermittelst der berühmten nach ihm benannten Formeln, welche gestatten, drei Charakteristiken einer Kurve zu finden (Ordnung, Klasse, Zahl der Doppelpunkte, der Doppeltangenten, Zahl der Wendetangenten und der Rückkehrpunkte), wenn man die übrigen kennt.

Auf die Frage, welche in einem gewissen Sinne reciprok zu der durch die Plückerschen Formeln gelösten ist, ob jeder Lösung derselben eine wirkliche Kurve entspreche, mußte man negativ antworten, da neuere Untersuchungen

15) In diesem Werke ist mit ersichtlicher Bevorzugung von dem „Prinzipe der Abzählung der Konstanten" Kenntnis gegeben und Gebrauch gemacht; wir wollen dasselbe erwähnen, da sich darauf eine Untersuchungsmethode stützt, deren ganze Bedeutung aufzuheben nicht gelingen wird, obwohl sich Beispiele von Irrtümern anführen lassen, zu denen es führen kann, wenn es ohne die notwendige Vorsicht angewandt wird.

Mit der Theorie der ebenen Kurven befassen sich auch die beiden folgenden Bücher, deren Existenz ich aus einer Anführung Plückers kenne *(Theorie der algebraischen Curven,* S. 206); A. Peters, *Neue Curvenlehre* 1835; C. C. F. Krause, *Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima. Edidit Schröder*, 1835.

16) S. auch eine Abhandlung Plückers, *Liouvilles Journ.* 1.

17) *Mém. prés.* 1730—31—32.

18) S. die in Note 7 citierte *Introductio.*

dargethan haben, daß für gewisse Kurven (die rationalen Kurven) die Zahl der Rückkehrpunkte eine gewisse Grenze nicht übersteigen kann.[19])

Auf der anderen Frage, die Plückerschen Formeln auf eine Kurve auszudehnen, welche mit Singularitäten höherer Ordnung ausgestattet ist, beruhen die Untersuchungen von Cayley und anderen,[20]) welche zu dem Schlusse geführt haben, daß jede Singularität einer Kurve als äquivalent einer gewissen Anzahl von Doppelpunkten, Spitzen, Wendetangenten und Doppeltangenten betrachtet werden kann.

Ich füge noch hinzu, daß man durch Jacobi,[21]) Hesse (1811—1874),[22]) Salmon,[23]) Cayley[24]) und deren zahlreiche Kommentatoren[25]) heute im Besitze eleganter Methoden ist, um analytisch die Wendepunkte einer durch eine Gleichung gegebenen Kurve, sowie die Berührungspunkte ihrer Doppeltangenten anzugeben.

Dank dem einen der überaus wertvollen Lehrbücher,[26]) mit welchen Salmon so gewaltig zur Verbreitung der neuesten algebraischen und geometrischen Methoden beigetragen hat, ist es heutzutage leicht, sich über diese und viele andere Fragen, welche sich auf die analytische Theorie der ebenen Kurven beziehen, eine genaue Kenntnis zu verschaffen.

---

19) Hierzu siehe Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, S. 352; Malet, *Hermathema*, 1880; Pellet, *Nouv. Ann.* II, 20, 1881.

20) Cayley, *Quart. Journ.* 7 und *Journ. für Math.* 64; La Gournerie, *Liouvilles Journ.* II, 14; Nöther, *Math. Ann.* 9; Zeuthen, das. 10; Halphen, *Comptes rendus* 78, *Liouvilles Journ.* II, 2, *Mém. prés.* 26; J. S. Smith, *Proc. math. Soc.* 6; Brill, *Math. Ann.* 16; Raffy, das. 23. — An diese Frage knüpft sich die Untersuchung der Zahl der Schnitte zweier Kurven, welche von einem ihnen gemeinsamen vielfachen Punkte absorbiert werden. Hierzu sehe der Leser die interessante Abhandlung von Zeuthen, *Acta math.* 1.

21) *Journ. für Math.* 40; vgl. Clebsch (das. 63).

22) *Journ. für Math.* 36, 40, 41.

23) *Phil. Mag.* Oktoberheft 1858.

24) *Phil. Trans.* 1859.

25) z. B. Dersch, *Math. Ann.* 7.

26) *A Treatise on higher plane curves* (1852); ins Deutsche übertragen durch Fiedler (Leipzig, 1873).

Man braucht aber nicht zu glauben, daß bei diesem Studium der fortwährende Gebrauch der Analysis unumgänglich sei; vielmehr erhob sich bald neben der Darlegung der Theorie der ebenen Kurven durch Euler, Cramer, Plücker, Salmon eine ebenso vollständige, aber mehr geometrische Theorie.

In einer berühmten Mitteilung, die im Jahre 1848 der Berliner Akademie gemacht wurde, zeigte Steiner, indem er die Theorie der Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Kurve wieder aufnahm, welche Bobillier (1797—1832) schon vordem[27]) als eine Erweiterung der Diametralkurven Newtons und Cramers aufgestellt, und mit welcher auch Graßmann (1809—1877) sich beschäftigt hatte,[28]) daß dieselbe als Grundlage für ein vom Gebrauche der Koordinaten unabhängiges Studium der ebenen Kurven dienen kann, und führte jene bemerkenswerten zu einer gegebenen Kurve covarianten Kurven ein, die heute seinen, Hesses und Cayleys Namen tragen. Diese kurzen Andeutungen, verbunden mit den Untersuchungen von Steiner selbst, von Chasles[29]) und Jonquières[30]) über die Entstehung der algebraischen Kurven vermittelst projektiver Büschel von Kurven niederer Ordnung, dienten als Grundlage für die *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*,[31]) in

27) *Gergonnes Ann.* 19.

28) *Journ. für Math.* 24. — Die Theorie der Polaren in bezug auf Kurven und Oberflächen wurde in der letzten Zeit auf eine bemerkenswerte Weise von Clifford (1845—1879) (*Proc. math. Soc.* 1868 oder *Mathematical Papers of Clifford*, 1882, S. 115) und von Reye (*Journ. für Math.* 72, 78) verallgemeinert. De Paolis widmete ihr eine interessante Schrift, welche in den *Lincei Mem.* 1885—1886 veröffentlicht ist.

29) *Comptes rendus*, 1853.

30) *Essai sur la génération des courbes géométriques*, 1858 (*Mém. prés.* 16). Vgl. Härtenberger, *Journ. für Math.* 58; Olivier das. 70, 71; Schoute, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 4, und die allerneuesten Untersuchungen von Jonquières über die Maximalzahl der vielfachen Punkte, die man bei einer ebenen Kurve beliebig annehmen kann (*Comptes rendus* 105).

31) Veröffentlicht im Jahre 1862 in den *Bologna Mem.* Möge es mir gestattet sein, hier den Wunsch auszusprechen, daß der berühmte Cremona, dessen Interesse für die Verbreitung der geometrischen

welcher Cremona in einer einheitlichen Methode zugleich mit vielen neuen Resultaten alles auseinandersetzt, was wichtigeres von den analytischen Geometern, die ihm vorhergingen, erhalten worden war.

Bei dem außerordentlichen Interesse der Sache scheint es mir auch, daß man in die Reihe der schon zitierten Arbeiten auch die Serie von Abhandlungen zu stellen hat, in welchen Clebsch (1833—1872) zuerst die Algebra der linearen Transformationen auf die Geometrie angewandt hat, dann, nachdem er die Wichtigkeit des Begriffes des Geschlechtes einer Kurve ins Licht gestellt, die Anwendung der Theorie der elliptischen[32]) und Abelschen Funktionen auf die Wissenschaft von der Ausdehnung darlegte und sie für das Studium der rationalen und elliptischen Kurven benützte.[33]) Es ist wahr, daß Brill und Nöther in einer Abhandlung,[34]) deren Bedeutung von Tag zu Tag wächst, gezeigt haben, daß die Theorie der algebraischen Funktionen in vielen Fällen die der eben angeführten Transcendenten ersetzen kann, aber das vermindert nicht, sondern vergrößert vielmehr das Verdienst, welches man den Methoden von Clebsch zuerkennen muß, da die von hervorragenden Geistern gemachten Anstrengungen, den Gebrauch eines

---

Studien bekannt ist, seine berühmten Schriften über die Theorie der Kurven und Oberflächen durch neue Ausgaben allen zugänglich machen wolle. — Diese Schriften sind in deutscher Übersetzung von Curtze unter dem Titel: *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven* (Greifswald, 1865), bez. *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung* (Berlin, 1870) erschienen.

32) Als Vorbereitung für solche Untersuchungen sind die von Aronhold (*Berliner Ber.* 1861) anzusehen, dann die von Brioschi (*Comptes rendus*, 1863, 64) über die Darstellung der Koordinaten der Punkte von gewissen Kurven als elliptische Funktionen eines Parameters.

33) *Journ. für Math.* 58, 64. Die von Clebsch erhaltenen Resultate haben sich infolge des schönen Werkes von Lindemann, welches den Titel trägt: *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch* (I. Bd. Leipzig, 1876) und von dem das Erscheinen des zweiten Bandes allgemein gewünscht wird, schnell verbreitet.

34) *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann.* 7.

Hilfsmittels vermeiden zu können, der überzeugendste Beweis der Macht desselben sind.

Die bis jetzt besprochenen Arbeiten behandeln allgemeine Eigenschaften der ebenen algebraischen Kurven.[35]) Aber an sie reiht sich eine große Menge von schönen Spezialabhandlungen, welche eine bestimmte Kategorie von Kurven behandeln; auf diese wollen wir einen kurzen Blick werfen.

Unter ihnen sind vor allen zu bemerken die von Maclaurin,[36]) von Sylvester,[37]) Cayley,[38]) Salmon,[39]) Durège,[40]) Cremona,[41]) von Sturm,[42]) von Küpper,[43]) Graßmann,[44]) Milinowski[45]) und von anderen über die Kurven dritter Ordnung,[46]) die Kapitel des *Barycentrischen Calculs*, dann verschiedene Arbeiten von Em. Weyr,[47]) von Clebsch und

---

35) Zu den im Texte angeführten Schriften müssen noch die von Brill hinzugezogen werden (*Math. Ann.* 13), ferner die von Geiser (*Annali di Matem.* II, 9) und die von Del Pezzo (*Napoli Rend.* 22) über den Zusammenhang, der zwischen den Singularitäten einer Kurve und denen ihrer Hesseschen Kurve besteht; ferner die von Laguerre (*Comptes rendus* 40) und Holst (*Math. Ann.* 11 und *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* 7), über die metrischen Eigenschaften der Kurven.

36) *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus.*

37) Vgl. Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven*, 5. Kap.

38) *Phil. Trans.* 1857; *Liouvilles Journ.* 9, 10.

39) *Journ. für Math.* 42.

40) *Zeitschr. f. Math.* 17; *Prager Ber.* 1871. — Man sehe auch das Buch *Die ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1871) und die Abhandlung von Gent (*Zeitschr. f. Math.* 17).

41) *Giorn. di Matem.* 2.

42) *Journ. für Math.* 90.

43) *Prager Abh.* VI, 5.

44) *Göttinger Nachr.* 1871 und 1872.

45) *Journ. für Math.* 78.

46) Hierzu Harnack, *Math. Ann.* 9. Caporali, *Lincei Atti*, III, 1; Folie und Le Paige, *Mémoires de l'Académie de Belgique*, 43. Halphen, *Math. Ann.* 15; *Bull. Soc. math.* 9.

47) Siehe *Giorn. di Matem., Lombardo Rend., Math. Ann., Wiener Ber.* und *Prager Ber.*

vielen anderen[48]) über die rationalen Kurven; die wichtigen Untersuchungen Steiners und Chasles' über die Kurven, die mit einem Centrum versehen sind,[49]) und die von Steiner über die dreispitzige Hypocykloide;[50]) ferner die Arbeiten, welche dem Beweise oder der Verallgemeinerung der dort ausgesprochenen Eigenschaften gewidmet sind,[51]) die interessanten Untersuchungen von Bertini[52]) über rationale Kurven, für welche man willkürlich die vielfachen Punkte bestimmen kann, die wichtigen Studien von Brill über die Kurven vom Geschlechte zwei,[53]) dann die eleganten Abhandlungen von Klein und Lie[54]) über die Kurven, welche eine infinitesimale Transformation in sich selbst zulassen, endlich die von Fouret über die Kurven, welche die eigenen reciproken Polaren in bezug auf unendlich viele Kegelschnitte sind,[55]) und die von Smith (1826—1883) über die Singularitäten der Modularkurven.[56])

---

48) Für die Clebschschen Arbeiten sehe man die in Note 33 angeführten Bände des *Journ. für Math.* nach. Über die ebenen rationalen Kurven dritter Ordnung sehe man die Arbeiten von Durège (*Math. Ann.* 1), Igel (das. 6), Rosenow (Dissertation, Breslau, 1873), Schubert (*Math. Ann.* 12), Dingeldey (das. 27, 28); über die Kurven vierter Ordnung die von Brill (*Math. Ann.* 12) und Nagel (das. 19); über die fünfter Ordnung von Rohn (das. 25), und über die rationalen Kurven beliebiger Ordnung die Schriften von Haase (*Math. Ann.* 2), von Lüroth (das. 9), Pasch (das. 18), Brill (das. 20), von Weltzien (das. 26) und Garbieri (*Giorn. di Matem.* 16).

49) *Journ. für Math.* 47; *Comptes rendus*, 1871.

50) *Journ. für Math.* 53.

51) Güßfeldt, *Math. Ann.* 2; Laguerre, *Bull. Soc. math.* 7; Cremona und Clebsch, *Journ. f. Math.* 64; Kiepert, *Zeitschr. f. Math.* 17; Frahm ebendas. 18; Milinowski das. 19; Intrigila, *Giorn. di Matem.* 23; Kantor, *Wiener Ber.* 1878 und *Bull Sciences math.* II, 3.

52) *Giorn. di Matem.* 15.

53) *Journ. für Math.* 65.

54) *Math. Ann.* 4.

55) *Bull. de la Société philomathique*, VII, 1.

56) Wenn p das Quadrat des Moduls einer elliptischen Funktion, q das Quadrat des vermittelst einer primären Transformation ungerader Ordnung transformierten Moduls und schließlich $F(p, q, 1) = 0$ die entsprechende Modulargleichung ist, so ist die Gleichung einer Modularkurve $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Siehe *Proc. math. Soc.* 9.

Neben diesen verdient dann noch eine hervorragende Stelle die Abhandlung von Steiner über die einer ebenen kubischen Kurve[57]) oder einer Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten eingeschriebenen Vielecke, auf welche die jüngsten Arbeiten von Küpper[58]) und Schoute[59]) von neuem die Aufmerksamkeit der Gelehrten gelenkt haben. Die Knappheit des Raumes nötigt mich, flüchtig hinwegzugehen über die Untersuchungen von Cayley *On polyzomal Curves otherwise the Curves* $\sqrt{u}+\sqrt{v}+\ldots\ldots=0$;[60]) von Graßmann, Clebsch,[61]) Schröter[62]) und Durège,[63]) betreffend die Erzeugung ebener Kurven dritter Ordnung, über die von Lüroth,[64]) von Casey,[65]) Darboux,[66]) Siebeck,[67]) von Crone,[68]) Zeuthen[69]) und noch anderen über einige spezielle ebene Kurven vierter Ordnung, über die von Battaglini, die sich auf die syzygetischen Kurven dritter Ordnung beziehen,[70]) und andere, welche auch eine besondere Erwähnung verdienen würden.

57) *Journ. f. Math.* 65; vgl. Ed. Weyr das. 73; Hurwitz, *Math. Ann.* 19.

58) *Math. Ann.* 24.

59) *Journ. für Math.* 95, 99; siehe auch die Abhandlung von August, *Grunerts Arch.* 59.

60) *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 25.

61) *Math. Ann.* 5.

62) *Math. Ann.* 5, 6. Man sehe auch hierzu die Abhandlung von Harnack in der *Zeitschr. f. Math.* 22. Die hauptsächlichsten von Durège und Schröter auf synthetischem Wege gefundenen Lehrsätze sind analytisch von Walter in seiner Dissertation *Über den Zusammenhang der Kurven dritter Ordnung mit den Kegelschnittscharen* (Gießen, 1878) bewiesen. Den genannten Schriften Schröters über die Kurven dritter Ordnung können wir nun noch sein neuerdings erschienenes rein geometrisches Lehrbuch: *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888) hinzufügen.

63) *Math. Ann.* 5.

64) *Math. Ann.* 1, 13; vgl. Clebsch, *Journ. für Math.* 59.

65) *Irish Trans.* 1869.

66) Siehe dessen Werk, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques* (Paris, 1873).

67) *Journ. für Math.* 57, 59, 66.

68) *Tidsskrift for Mathematik*, IV, 3.

69) *Forhandlinger af Videnskabs Selskab af Kjobenhavn* 1879.

70) Erschienen in den *Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini* (Mailand, 1881).

Was ich aber nicht mit Stillschweigen übergehen kann, das sind die Arbeiten von Hesse über die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung und über die Gleichung, welche zu deren Bestimmung dient;[71]) dann die von demselben Hesse,[72]) Steiner,[73]) Aronhold[74]) (1819—1884) über die Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung, welche eine hervorragende Stelle verdienen, da sie viele bemerkenswerte Eigenschaften derselben ins Licht gestellt haben; dieselben wurden darauf von Geiser[75]) durch stereometrische Betrachtungen dargethan, von Clebsch[76]) dagegen und Roch[77]) vermittelst der Theorie der Abelschen Funktionen untersucht.

III.

Theorie der Oberflächen.

Das Streben nach Verallgemeinerung, welches die geometrischen Untersuchungen leitete, seitdem sich der Einfluß der Analysis auf dieselbe mehr oder weniger offen geltend gemacht, trieb alsbald die Gelehrten dazu, sich mit den Erscheinungen des Raumes zu beschäftigen, welche Analogien mit den schon in der Ebene betrachteten darbieten. Daher sehen wir denn auch die Forschungen über die Oberflächen

---

71) *Journ. für Math.* 28, 34, 38.

72) *Journ. für Math.* 49, 55; vgl. auch Cayley (das. 58).

73) *Journ. für Math.* 49.

74) *Berliner Ber.* 1864, sowie *Nouv. Ann.* II, 11.

75) *Math. Ann.* 1; *Journ. für Math.* 72.

76) Vgl. Note 33.

77) *Journ. für Math.* 66. — Über die Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung sehe man auch folgende Arbeiten: Riemann, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen für den Fall $p = 3$. Gesammelte Werke* (Leipzig, 1876), S. 456—499; Nöther, *Math. Ann.* 15; Cayley, *Journ. für Math.* 94; Frobenius (das. 99); Freyberg, *Math. Ann.* 17; H. Weber (ebendas. 23).

bald denen über die ebenen Kurven folgen. Die Theorie dieser Gebilde ist jedoch neueren Ursprungs.

Den griechischen Geometern waren in der That nur einige wenige besondere Oberflächen bekannt (die Kugel, die Cylinder und Kegel, Konoide und Sphäroide, die plektoidischen Oberflächen und wenige andere). Erst Wren (1669), Parent und Euler begannen sich mit den Oberflächen zweiten Grades zu beschäftigen, und wir müssen zur Schule von Monge gehen, um die Eigenschaften von grösserer Wichtigkeit dieser höchst bemerkenswerten Oberflächen anzutreffen.[1]) Zu diesen ersten Eigenschaften wurden in unserem Jahrhundert durch das zahlreiche Heer von Geometern, welche die Flächen zweiter Ordnung einer besonderen Betrachtung unterwarfen, viele andere hinzugefügt, und dank den Arbeiten so ausgezeichneter Gelehrter, wie Jacobi,[2])

---

1) Um sich von dem bedeutenden Anteil, welchen die Mongesche Schule an der Schöpfung der Theorie der Flächen zweiten Grades hatte, zu überzeugen, genügt es, sich folgendes zu vergegenwärtigen: Ihr verdanken wir die doppelte Erzeugungsweise des einmanteligen Hyperboloides und des hyperbolischen Paraboloides durch die Bewegung einer Geraden (Monge, *Journ. Éc. polyt.* 1) und die Erzeugung aller Flächen zweiten Grades, mit Ausnahme des hyperbolischen Paraboloides, durch Bewegung eines Kreises (Hachette, *Eléments de Géométrie à trois dimensions*). Monge und Hachette verdankt man den Beweis der Existenz der drei Hauptebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung; Monge (*Correspondance sur l'École polytechnique*) die Entdeckung des Ortes der Scheitel der dreirechtwinkligen Triëder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren, und Bobillier (*Gergonnes Ann.* 18) die des Ortes der Scheitel der dreirechtwinkligen Triëder, deren Seitenflächen eine Fläche zweiter Ordnung berühren; Monge bestimmte die Krümmungslinien des Ellipsoides (*Journ. Éc. polyt.* 2); Livet (das. 13) und Binet (ebendas. 16) dehnten die bekannten Lehrsätze des Apollonius auf den Raum aus, während Chasles (*Correspondance sur l'Éc. polyt.*) andere analoge Sätze gab; Dupin (*Journ. Éc. polyt.* 14) machte einige interessante Methoden zur Erzeugung solcher Oberflächen bekannt. Brianchon (das. 13) zeigte, dass die reciproke Polare einer Fläche zweiten Grades ebenfalls eine Fläche zweiten Grades sei, u. s. w.

2) *Journ. für Math.* 12.

Mac Cullagh (1809—1847),[3]) Chasles,[4]) Hesse,[5]) Seydewitz (1807—1852),[6]) Schröter[7]) konnte die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung in den mehr elementaren Unter-

3) *Irish Proc.* 2.

4) *Aperçu historique*, Note 25, 28, 31, 32; *Comptes rendus*, 1855; *Liouvilles Journ.* 1860 u. s. w.

5) *Journ. für Math.* 18, 20, 24, 26, 60, 73, 85, 90.

6) *Grunerts Arch.* 9.

7) *Journ. für Math.* 62. Über die Oberflächen zweiter Ordnung sehe man auch die Abhandlungen von Townsend (*Cambridge Journ.* 3), von Darboux (*Bull. Soc. Math.* 2), von Meray und Cremona (*Annali di matem.* I, 3) u. s. w. und die *Géométrie de direction* (Paris, 1869) von P. Serret.

Eine der wichtigsten Fragen, welche sich in der Theorie der Flächen zweiten Grades darbietet, ist die Konstruktion derselben, wenn neun ihrer Punkte gegeben sind. Dieselbe wurde von Seydewitz (*Grunerts Arch.* 9), Chasles (*Comptes rendus*, 1855), Steiner (*Gesammelte Werke*, II. Bd., *Nachlass*), Schröter (*Journ. für Math.* 62), Sturm (*Math. Ann.* 1) und Dino (*Napoli Rend.* 1879) gelöst. — Daran knüpft sich die Untersuchung des achten Punktes, der allen Flächen zweiter Ordnung gemeinsam ist, die durch sieben gegebene Punkte gehen. Dieser wurde der Gegenstand wichtiger Untersuchungen von Hesse (*Journ. für Math.* 20, 26, 73, 75, 99), Picquet (das. 73, 99), Caspary, Schröter, Sturm, Zeuthen (das. 99) und Reye (das. 100).

Ein anderes interessantes Problem ist die Untersuchung der Flächen zweiten Grades, in bezug auf welche zwei gegebene Flächen zweiten Grades reziproke Polaren voneinander sind; dasselbe wurde analytisch von Battaglini behandelt (*Lincei Atti*, 1875), von d'Ovidio (*Giorn. di Matem.* 10) und synthetisch von Thieme (*Zeitschr. f. Math.* 22).

Über einige Flächen zweiten Grades, welche besondere metrische Eigenschaften besitzen (orthogonale, gleichseitige Hyperboloide), haben geschrieben: Steiner (*Journ. für Math.* 2 und *Systematische Entwickelung*), Chasles (*Liouvilles Journ.* 1 [1836]), Schröter (*Journ. für Math.* 85), Schönfließ (*Zeitschr. für Math.* 23, 24 und *Journ. für Math.* 99), Vogt (*Journ. für Math.* 86) und Ruth (*Wiener Ber.* 80).

Zu den neuesten Studien über die Flächen zweites Grades gehören die von Zeuthen (*Math. Ann.* 19, 26) über die Theorie der projektiven Figuren auf einer solchen Fläche; daran schließen sich auch einige schöne Untersuchungen, welche Voß gemacht hat (*Math. Ann.* 25, 26), um gewisse Resultate von Poncelet und Bruno (*Torino Atti* 17) weiter auszudehnen. Auch sind die Anwendungen der hyperelliptischen Funktionen auf sie bemerkenswert, welche Staude (*Math. Ann.* 20, 21, 25, 27) gemacht hat.

richt eingeführt werden und methodisch auf analytischem sowohl wie synthetischem Wege behandelt werden.[8])

Aber nach der Lehre von den Oberflächen zweiten Grades entstand und entwickelte sich alsbald die der Oberflächen höherer Ordnung. Chasles[9]) und Gergonne,[10]) als die ersten, entdeckten an diesen Gebilden wunderbare Eigenschaften. Poncelet bestimmte die Klasse einer in ihrer Ordnung allgemeinen algebraischen Oberfläche[11]) und eröffnete so die Untersuchungen, welche zu den Beziehungen führen sollten, mit welchen Salmon[12]) und Cayley[13]) die Lösung der analogen Aufgabe zu derjenigen versuchten, welche Plücker durch seine berühmten Formeln gelöst hatte.

Jacobi[14]) und später Reye[15]) beschäftigten sich mit den Kurven und Gruppen von Punkten, die durch den Schnitt von algebraischen Oberflächen entstehen. Chasles,[16]) Cremona,[17]) Reye,[15]) Escherich,[18]) Schur,[19]) mit ihrer Ent-

---

8) Davon geben Zeugnis die Partien, welche in ihren wertvollen Lehrbüchern diesen Oberflächen gewidmet haben: Hesse *(Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes)*, Salmon *(Analytische Geometrie des Raumes)*, Cremona *(Preliminari di una teoria geometrica delle superficie)*, Reye *(Die Geometrie der Lage)* und Schröter *(Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung)*.

9) *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science* (Anhang zum *Aperçu historique*).

10) *Gergonnes Ann.* 17.

11) *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques.* (*Journ. für Math.* 4).

12) *Cambridge Journ.* 2, 4; *Irish Trans.* 23.

13) *Cambridge Journ.* 7, 8; *Phil. Trans.* 1869, 71 u. 72. Man sehe auch die von Zeuthen in den *Math. Ann.* 4, 9, 10, von Jonquières in den *Nouv. Ann.* 13 und von Halphen in den *Annali di Matem.* II, 9 veröffentlichten Abhandlungen.

14) *Journ. für Math.* 15.

15) *Math. Ann.* 1, 2. Vgl. auch eine Abhandl. von Padova im *Giorn. di Matem.* 9, sowie eine von Valentiner, *Tidsskrift for Mathematik* IV, 3.

16) *Comptes rendus* 45.

17) *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. (Bologna Mem.* II, 6, 7).

18) *Wiener Ber.* 1877, 1882.

19) *Math. Ann.* 27.

stehung vermittelst projektiver oder reciproker Systeme von Oberflächen niederer Ordnung, Graßmann (1809—1877)[20]) mit anderen Erzeugungsweisen; Salmon,[21]) Clebsch,[22]) Sturm,[23]) Schubert[24]) und andere behandelten eine wichtige Klasse von Aufgaben, welche sich auf Gerade beziehen, die mit einer gegebenen Oberfläche Berührungen von vorher bestimmter Ordnung haben; schließlich entdeckte Schur vor kurzem eine lineare Konstruktion[25]) für Flächen beliebiger Ordnung. Eine interessante Erweiterung der Polarentheorie der Oberflächen beliebiger Ordnung verdanken wir Reye.[26])

Trotz dieser und anderer Arbeiten, die ich der Kürze halber stillschweigend übergehen muss, trotz der schönen Darlegungen, welche Salmon[27]) und Cremona[28]) über sie gemacht haben, kann man doch nicht sagen, daß die Theorie der Oberflächen weit vorgeschritten sei. Die Fragen, die noch zu lösen bleiben, sind zahlreich und von fundamentaler Wichtigkeit, und die Mittel, die zur Überwindung der Schwierigkeiten, welche deren Lösung bietet, zur Verfügung stehen, sind noch nicht genügend vervollkommnet. Vielleicht ist das der Grund dafür, daß so viele Gelehrte sich zum Studium besonderer Flächen wandten, indem sie hofften, nicht nur auf diesem Felde eine reichlichere Ernte von Wahrheiten zu machen, sondern auch zu Untersuchungsmethoden zu gelangen, die der Verallgemeinerung fähig sind. — Und

---

20) *Journ. für Math.* 49.

21) *Cambridge Journ.* 4; *Quart. Journ.* 1; *Phil. Trans.* 1860.

22) *Journ. für Math.* 58, 63.

23) *Journ. für Math.* 72.

24) *Math. Ann.* 10, 11, 12; *Abzählende Geometrie*, 5. Abschnitt. S. auch Krey, *Math. Ann.* 15.

25) *Math. Ann.* 23.

26) *Journ. für Math.* 72, 78, 79, 82.

27) *Geometry of three dimensions;* in deutscher Übersetzung von Fiedler: *Analytische Geometrie des Raumes* in zwei Bänden (3. Auflage, 1879/80).

28) *Preliminari* etc. Vgl. Note 17.

daß ihre Erwartungen teilweise nicht getäuscht worden sind, das beweisen die zahlreichen Resultate, die man schon über die Oberflächen dritten Grades, sowie über einige von der vierten Ordnung erhalten hat, über welche es mir noch obliegt, Bericht zu erstatten.

Es ist allgemein bekannt, daß die beiden hervorragendsten Eigenschaften einer Fläche dritter Ordnung die sind, 27 Gerade zu enthalten, und ein Pentaeder zu besitzen, welches zu Ecken die Doppelpunkte und zu Kanten die Geraden der Hesseschen Fläche jener Oberfläche hat. England und Deutschland können sich um die Ehre, sie entdeckt zu haben, streiten. Wenn auch schon im Jahre 1849 Cayley und Salmon[29]) die Geraden einer kubischen Fläche bestimmt haben, und im Jahre 1851 Sylvester[30]) das Pentaeder entdeckte, so ist doch nicht minder wahr, daß Steiner unabhängig von ihnen die Existenz jener und dieses in seiner berühmten Mitteilung, welche er der Berliner Akademie im Jahre 1853 machte, behauptet hat.[31]) Aber während die Studien der englischen Geometer fast gänzlich der Fortsetzung entbehren,[32]) steht die Arbeit von Steiner an der Spitze einer langen Reihe von Schriften, durch welche die Theorie der Oberflächen dritter Ordnung schnell einen ungehofften Grad der Vollendung erhielt. Indem ich die Abhandlungen von Schröter,[33]) August[34]) u. s. w., in welchen einige der von Steiner ausgesprochenen Sätze bewiesen werden, nur kurz erwähne, will ich mich darauf beschränken, die Aufmerksamkeit der Leser auf die mit Recht berühmten Schriften zu lenken, die von

29) Vgl. die in Note 12 und 13 angeführten Arbeiten.

30) *Cambridge Journ.* 6.

31) Auch im *Journ. für Math.* 53 publiziert.

32) Die einzige mir bekannte Arbeit, welche mit den Studien von Cayley und Salmon im Zusammenhange steht, ist eine von Schläfli (*Quart. Journ.* 2), die besonders dadurch wichtig ist, daß sie die erste ist, welche den Begriff der „Doppelsechs" enthält.

33) *Journ. für Math.* 62.

34) *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Berlin, 1862).

Cremona[35]) und von Sturm[36]) über diese Oberflächen verfaßt und im Jahre 1866 von der Berliner Akademie mit dem Steiner-Preise gekrönt sind, Arbeiten, auf welche jeder zurückkommen muß, welcher sich mit diesen wichtigen geometrischen Gebilden vertraut machen will. Ich kann mich nicht aufhalten bei den verschiedenen Erzeugungsweisen einer Fläche dritter Ordnung, die Graßmann,[37]) August,[38]) Affolter[39]) und Piquet[40]) den von Steiner angegebenen hinzugefügt haben, bei der Konstruktion dieser Flächen, welche Le Paige[41]) gegeben hat, bei den vielen Sätzen, die sich auf die Verteilung der Geraden, der dreifach berührenden Ebenen und die Kurven einer kubischen Fläche beziehen und welche vor kurzem von Cremona,[42]) Affolter,[43]) von Sturm[44]) und Bertini[45]) entdeckt wurden, endlich bei den von Cremona,[46]) Caporali,[47]) Reye[48]) und Beltrami[49]) studierten Eigenschaften gewisser Hexaeder, welche mit einer Fläche dritter Ordnung verknüpft sind, sowie bei den von Zeuthen[50]) betrachteten zwölf vollstän-

35) *Journ. für Math.* 68; ferner *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin, 1870), in welchem Buche die deutsche Übersetzung der in Note 17 und 28 zitierten *„Preliminari“* und diejenige dieser Preisschrift (durch Curtze) vereinigt sind.

36) *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.* Leipzig, 1867.

37) *Journ. für Math.* 51; vgl. eine von Schröter (das. 96) veröffentlichte Abhandlung.

38) Vgl. die in Note 34 zitierte Arbeit. — Man sehe auch Schubert, *Math. Ann.* 17.

39) *Grunerts Arch.* 56.

40) *Bull. soc. math.* 4.

41) *Acta math.* 3.

42) *Lombardo Rend.* März 1871.

43) *Grunerts Arch.* 56.

44) *Math. Ann.* 23.

45) *Lombardo Rend.* 1884; *Annali di Matem.* II, 12.

46) *Math. Ann.* 13; *Lincei Mem.* 1876—1877.

47) *Napoli Rend.* 1881.

48) *Journ. für Math.* 78.

49) *Lombardo Rend.* 1879.

50) *Acta math.* 5.

digen, in sie einbeschriebenen Pentaedern. Ich will noch anführen, daß eine Einteilung dieser Oberflächen, die auf die Betrachtung der 27 auf ihr gelegenen Geraden sich stützt, von Schläfli gemacht ist[51]) und eine neuere von Rodenberg,[52]) die sich auf das Pentaeder gründet, daß ferner ein genaues und eingehendes Studium der Regelflächen dritten Grades (von denen eine von Cayley entdeckt wurde) den Gegenstand wertvoller Arbeiten Cremonas,[53]) Em. Weyrs[54]) und Benno Kleins[55]) bildet, daß schließlich die sogenannte Diagonalfläche einen wichtigen Teil in einer Untersuchung von Clebsch über die Gleichungen fünftes Grades bildet[56]) und daß andere besondere Fälle von Cayley[57]) und Eckardt[58]) in einigen wertvollen Abhandlungen betrachtet wurden. Wenn ich dann noch gesagt habe, daß die Untersuchungen von Salmon,[59]) Clebsch,[60]) Gordan[61]) und de Paolis[62]) die

51) *Phil. Trans.* 1863; vgl. Cayley (das. 1869).

52) *Math. Ann.* 14.

53) *Lombardo Atti*, 1861.

54) *Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde* u. s. w. Leipzig, 1869; *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde*, Leipzig, 1870.

55) *Über die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf eine Ebene.* (Dissertation. Straßburg, 1876.)

56) *Math. Ann.* 4.

57) *Phil. Mag.* 1864.

58) *Math. Ann.* 10.

59) *Phil. Trans.* 150.

60) *Journ. für Math.* 58.

61) *Math. Ann.* 5.

62) *Lincei Mem.* 1880—1881. Man sehe auch eine Note von Brioschi in den *Lincei Atti* II, 3, in welcher bewiesen wird, daß die 45 dreifach berührenden Ebenen einer Oberfläche dritter Ordnung dreien Oberflächen zehnter Klasse gemeinsam sind. Neuerdings fand Bauer (*Abh. der Bayr. Akad. der Wiss.* 14, 1883) analytisch von neuem, was Sturm schon 1867 in seinen *Synthetischen Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung* erkannt hatte, daß die Schnittkurve einer Oberfläche dritter Ordnung mit ihrer Hesseschen Fläche für beide eine parobolische Kurve ist; ein bemerkenswertes Resultat, weil es das Analogon im Raume zu einem bekannten Satze über die ebene kubische Kurve ist.

geometrische Bedeutung für das Verschwinden der fundamentalen invarianten Formen der quaternären kubischen Form festgestellt haben, welche gleich Null gesetzt in homogenen Koordinaten eine Fläche dritter Ordnung darstellt, daß schließlich Jordan[63]) von Grund auf die Natur der Gleichung studiert hat, welche zur Bestimmung der Geraden einer kubischen Fläche dient, dann glaube ich dem Leser genug Momente an die Hand gegeben zu haben, um daraus den (von mir eben angedeuteten) Schluß zu ziehen, daß die Theorie dieser geometrischen Gebilde, von welchem Punkte man sie auch betrachten mag, heute einen beachtenswerten Grad der Vollendung erreicht hat.

Solches kann man jedoch nicht von der Theorie der Oberflächen vierten Grades behaupten, vielmehr sind von ihnen nur wenige Klassen genauer studiert; über jede derselben werde ich kurz sprechen. An die erste Stelle will ich die Developpabele vierter Klasse setzen, die zweien Flächen zweiten Grades umbeschrieben ist, und die geradlinigen Flächen vierten Grades; jene wurde von Poncelet[64]) und Chasles[65]) untersucht, diese von demselben Chasles,[66]) von Cayley[67]) und vollständiger von Cremona.[68])

Dann lasse ich die Oberflächen vierter Ordnung folgen, auf welchen Scharen von Kegelschnitten existieren und welche alle mit außerordentlichem Scharfsinne von Kummer[69]) bestimmt wurden. Unter diesen sind zwei besonderer Erwähnung wert, da sie das Objekt zahlreicher Untersuchungen gewesen sind: die Oberfläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und die römische Fläche von Steiner.

Von der ersteren entdeckte Kummer im Jahre 1864 die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die ihr doppelt um-

63) *Liouvilles Journ.* II, 14; *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1870).

64) *Traité des propriétés projectives des figures.*

65) *Comptes rendus,* 1862.

66) Ebendas., 1861.

67) *Phil. Trans.* 1864.

68) *Bologna Mem.* 1868.

69) *Berliner Ber.* 1864; *Journ. für Math.* 64.

geschriebene Developpabele aus fünf Kegeln zweiter Ordnung besteht. Gleichzeitig fand Moutard[70]) dieselbe Eigenschaft für den Fall, daß die Doppelkurve der Oberfläche der unendlich entfernte imaginäre Kugelkreis ist,[71]) und er bemerkte weiter gleichzeitig mit Darboux,[72]) daß in diesem Falle die Oberfläche zu einem dreifachen Systeme von orthogonalen Oberflächen, gebildet von Flächen derselben Art, gehören kann. Von jener Zeit ab wurden die Oberflächen vierter Ordnung, welche als Doppelkurve den unendlich entfernten imaginären Kugelkreis haben, wiederholt von Darboux,[73]) von Laguerre (1834—1886)[74]) und von Casey[75]) studiert; hingegen diejenigen, welche als Doppelkurve einen beliebigen Kegelschnitt besitzen, von Cremona,[76]) Geiser,[77]) Sturm,[78]) Zeuthen,[79]) von Clebsch,[80]) Korndörfer,[81]) Berzolari[82]) und Domsch[83]) — welcher auf sie die hyperelliptischen Funktionen anwandte — und diejenigen, welche einen Kuspidalkegelschnitt haben, von Tötössy.[84]) Was die Klassifikation dieser Oberflächen betrifft, so möge

70) *Nouv. Ann.* II, 5.

71) Die Dupinsche Cyklide gehört zu diesen.

72) Vgl. *Comptes rendus* 1864.

73) Die Untersuchungen von Darboux finden sich in dem schon angeführten Buche: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873) zusammengefaßt.

74) S. die Aufzählung der Arbeiten, die zu Ende des in der vorigen Note zitierten Werkes sich findet, und die *Notice sur la vie et les travaux de M. Laguerre,* veröffentlicht von Poincaré in den *Comptes rendus* 104.

75) *Phil. Trans.* 1871.

76) *Lombardo Rend.* 1871.

77) *Journ. für Math.* 70.

78) *Math. Ann.* 4.

79) *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit* (Kopenhagen, 1879). Von dieser Abhandlung habe ich eine italienische Übersetzung in den *Annali di Matem.* II, 14 veröffentlicht.

80) *Journ. für Math.* 69.

81) *Math. Ann.* 1, 2, 3, 4.

82) *Annali di Matem.* II, 13.

83) *Leipziger Dissertation* (Greifswald, 1885).

84) *Math. Ann.* 19.

es mir gestattet sein, meinen Namen anzuführen[85]) neben dem meines teuern Freundes Segre.[86])

Die römische Fläche von Steiner hat wiederholt die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen und zwar vorzüglich zweier Eigenschaften wegen; die eine derselben, nämlich von jeder Tangentialebene in zwei Kegelschnitten getroffen zu werden, wurde besonders von den Synthetikern betrachtet, die andere, dass die homogenen Koordinaten ihrer Punkte sich als ganz allgemeine ternäre quadratische Formen darstellen lassen,[87]) wurde mehr von den analytischen Geometern verwertet. Wer Lust hat, alle Eigenschaften, die sie besitzt, kennen zu lernen,[88]) wird dieselben in den synthetischen Abhandlungen von Cremona,[89]) Schröter[90]) und Sturm,[91]) auf den Seiten, welche Reye ihr in seiner *Geo-*

85) *Torino Mem.* II, 36.

86) *Math. Ann.* 24. Betreffend die Konstruktion einer Oberfläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt sehe man eine Abhandlung von Bobek (*Wiener Ber.* 11. und 18. Dez. 1884) und eine von Veronese (*Atti dell' Istituto Veneto,* VI, 1); hinsichtlich der Konstruktion einer Cyklide sehe man eine Abhandlung von Saltel (*Bull. Soc. math.* 3).

87) Weierstraß, *Berliner Ber.* 1863.

88) Unter den Eigenschaften der römischen Fläche von Steiner verdient eine hervorragende Stelle die (durch verschiedene Methoden von Cremona und Clebsch nachgewiesene) Eigenschaft, daß sie zu asymptotischen Kurven (Haupttangentenkurven) rationale Kurven vierter Ordnung hat. Eine andere Eigenschaft derselben wurde von Darboux (*Bull. sciences math.* II, 4) entdeckt und besteht darin, daß sie die einzige Fläche ist, außer den Flächen zweiten Grades und den Regelflächen dritten Grades, bei welcher durch jeden Punkt unendlich viele Kegelschnitte gehen. Neuerdings hat Picard (*Journ. für Math.* 100) gezeigt, daß sie die einzige nicht geradlinige Oberfläche ist, deren sämtliche ebene Schnitte rationale Kurven sind. Man sehe hierzu noch eine Note von Guccia in den *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1. — Lie machte (*Archiv for Math. og Naturvidenskab.* 3) die interessante Bemerkung, daß der Ort der Pole einer Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte einer Steinerschen Fläche eine ebensolche Fläche ist.

89) *Journ. für Math.* 63; *Lombardo Rend.* 1867.

90) *Journ. für Math.* 64.

91) *Math. Ann.* 3.

metrie der Lage (2. Bd.) gewidmet hat, und in den analytischen Abhandlungen von Cayley,[92]) Beltrami,[93]) Clebsch,[94]) Eckardt,[95]) Laguerre[96]) und Gerbaldi[97]) finden.

Kummer verdanken wir auch die Kenntnis einer anderen wichtigen Klasse von Flächen vierter Ordnung; dieselbe besteht aus Oberflächen, die nicht singuläre Linien enthalten, sondern nur singuläre Punkte.[98]) Wir werden in kurzem (§ VII) sehen, welche Untersuchungen Kummer zu diesen Oberflächen geführt haben; für jetzt genüge es, hervorzuheben, dass die interessanteste unter ihnen (welche man heute die Kummersche Oberfläche nennt) 16 singuläre Doppelpunkte und 16 singuläre Tangentialebenen hat und daß Specialfälle derselben die Wellenfläche von Fresnel[99]) und das von Cayley 1846 untersuchte Tetraedroid[100]) sind. Eine solche Oberfläche ist zu sich selbst dual.[101]) Ihre asym-

92) *Journ. für Math.* 64; *Proc. math. Soc.* 5.

93) *Giorn. di Matem.* 1; *Bologna Mem.* 1879.

94) *Journ. für Math.* 67.

95) *Math. Ann.* 5.

96) *Nouv. Ann.* II, 11, 12; *Bull. Soc. math.* 1.

97) *La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche* (Torino, 1881).

98) *Berliner Abh.* 1866 und *Berliner Ber.* 1864.

99) Diese Oberfläche hat eine fundamentale Bedeutung in der mathematischen Theorie des Lichtes. Es ist in der That bekannt, daß die Bestimmung der Ebenen, welche sie längs Kreisen berühren, Hamilton zur Entdeckung der konischen Refraktion führte, einer Erscheinung, welche der Aufmerksamkeit der Physiker entgangen war. Sie erfreut sich vieler interessanter Eigenschaften und war Gegenstand wichtiger Untersuchungen verschiedener Gelehrten, insbesondere Mannheims (*Comptes rendus*, 78, 81, 85, 88, 90; *Association franç. pour l'avanc. des sciences* 1874, 75, 76, 78), *Proc. Roy. Soc.* 1882; *Collectanea mathematica* u. s. w.

100) *Liouvilles Journ.* 11; *Journ. für Math.* 87. Vgl. eine Abhandlung von Segre im *Giorn. di Matem.* 21. Andere Spezialfälle der Kummerschen Fläche wurden von Rohn und Segre (*Leipziger Ber.* 1884) studiert.

101) Diese Eigenschaft der Kummerschen Fläche veranlaßte eine Untersuchung über die Oberflächen beliebiger Ordnung, welche dieselbe besitzen, eine Untersuchung, die schon von Kummer und Cayley unternommen ist, *Berliner Ber.* 1878.

ptotischen Kurven wurden von Klein und Lie bestimmt[102]) und Reye[103]) zeigte, daß jede die Grundkurve eine Büschels von Oberflächen vierter Ordnung ist; zwischen ihnen und den Thetafunktionen existiert eine innige Beziehung, welche Cayley und Borchardt (1817—1880)[104]) entdeckt haben und die H. Weber[105]) zusammen mit anderen entwickelt hat;[106]) die algebraischen Fragen, welche sich an die Bestimmung ihrer Singularitäten knüpfen, wurden von Jordan[107]) gelöst; endlich kann man dieselbe, wie Rohn[108]) es gethan hat, vermittelst der Theorie der hyperelliptischen Funktionen[109]) behandeln.

Indem ich die Oberflächen vierter Ordnung, welche als Doppelkurve einen in zwei getrennte oder zusammenfallende Gerade degenerierten Kegelschnitt haben und andere, mit denen Cayley[110]) sich beschäftigt hat, übergehe, will ich noch die Monoide erwähnen,[111]) die von Rohn studiert sind,[112]) und

---

102) *Berliner Ber.* 1870, oder *Math. Ann.* 23.

103) *Journ. für Math.* 97; vgl. Segre das. 98

104) *Journ. für Math.* 83, 94; oder *Borchardts Gesammelte Werke* (Berlin, 1888, S. 341); vgl. Brioschi und Darboux, *Compt. rend.*, 1881.

105) *Journ. für Math.* 84.

106) S. die in Note 83 zitierte Abhandlung, und für die Geschichte der Anwendung der hyperelliptischen Funktionen auf die Kummersche Oberfläche die Einleitung der Abhandlung von Rohn, *Math. Ann.* 15.

107) *Journ. für Math.* 70.

108) *Münchener Dissertation*, 1878; *Math. Ann.* 15.

109) Die anderen Oberflächen vierter Ordnung mit singulären Punkten wurden von Cayley studiert (*Proc. math. Soc.* 1870, 1871), vollständiger von Rohn in einer sehr schönen Abhandlung, die von der Jablonowskischen Gesellschaft kürzlich prämiiert ist (vgl. *Math. Ann.* 29). Endlich wurden die von Flächen zweiten Grades eingehüllten Flächen vierter Ordnung von Kummer untersucht, *Berliner Ber.* 1872.

110) *On the quartic surfaces* $(+)(u, v, w)^2 = 0$ (*Quart. Journ.* 10, 11); *On the quartic surfaces represented by the equation symmetrical determinant* $= 0$ (*Quart. Journ.* 14).

111) Bekanntlich nennt man nach Cayley ein Monoid eine Oberfläche n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkte.

112) *Math. Ann.* 24; vgl. auch die Dissertation von Lampe, Berlin, 1864.

diejenigen Flächen, welche, ohne geradlinig zu sein, eine gewisse Anzahl von Geraden enthalten. Dieselben sind der Ort der Punkte, in welchen vier entsprechende Ebenen von vier kollinearen Räumen sich schneiden; Chasles hat ihre Ordnung bestimmt und Schur eine Menge eleganter Eigenschaften derselben gefunden.[113])

Ich will diesen Abschnitt meiner Musterung beschließen, indem ich noch einige Oberflächen von höherer als der vierten Ordnung anführe, welche die Gelehrten schon beschäftigten. Zuerst verdienen die geradlinigen Oberflächen erwähnt zu werden, welche im allgemeinen von Chasles,[114]) Salmon,[115]) Cayley,[116]) von Plücker,[117]) La Gournerie (1814—1883),[118]) Voss[119]) und im besonderen von Chasles,[120]) Cremona,[120]) Schwarz,[121]) La Gournerie[122]) (Regelflächen, die in bezug auf ein Tetraeder symmetrisch sind), von

113) *Math. Ann.* 18, 17. Außer den im Texte zitierten Oberflächen wurden noch andere spezielle Flächen studiert, die ich der Kürze wegen übergehen muß; der größere Teil derselben wurde vermittelst der Theorie der Abbildungen entdeckt oder betrachtet, siehe § VI.

114) *Correspondance mathématique* 9; *Liouvilles Journ.* 2.

115) *Cambridge Journ.* 8 und *Irish Trans.* 23.

116) *Phil. Trans.* 1863—1869. In den angeführten Arbeiten haben Cayley und Salmon die Regelflächen bearbeitet als die Örter der Geraden, die drei gegebene Kurven treffen, oder eine einmal und eine zweite zweimal treffen, oder Trisekanten einer Kurve sind. Rupp hat neuerdings diese Betrachtungen wieder aufgenommen, um auf eine andere Weise die Resultate zu erhalten und zu modifizieren, zu denen jene Mathematiker gelangt waren (*Math. Ann.* 18).

117) *Annali di Matem.* II, 1.

118) *Traité de géométrie descriptive,* Art. 629 u. 635.

119) *Math. Ann.* 8, 12, 13.

120) *Comptes rendus,* 1862; vgl. d'Ovidio und Dino, *Giorn. di Matem.* 3.

121) *Dissertation,* gedr. zu Berlin 1864, und *Journ. für Math.* 67.

122) *Recherches sur les surfaces réglées tetraédrales symétriques* (Paris, 1867). Ich bemerke, daß ein Büschel von Oberflächen, die in Bezug auf ein Tetraeder symmetrisch sind, mit einem projektiven Ebenenbüschel eine bemerkenswerte Fläche erzeugt, die von Eckardt (*Zeitschr. f. Math.* 20) bearbeitet ist und welche die allgemeine Oberfläche dritter Ordnung in sich schließt.

Clebsch,[123]) Armenante[124]) (rationale und elliptische Regelflächen), von Em. Weyr[125]) (Regelflächen, erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier gerader Punktreihen in der Korrespondenz $[m, n]$), von Ed. Weyr[126]) (Oberflächen, erzeugt durch die Bewegung eines variabelen Kegelschnittes), von Eckardt[127]) und Chizzoni[128]) (Regelflächen, erzeugt durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier ebener projektiv bezogener Kurven). Dann folgen solche, die, wenn sie auch nicht Regelflächen sind, doch Gerade enthalten und die von Sturm[129]) und Affolter[130]) untersucht sind, ferner die algebraischen Minimalflächen, bei welchen Geiser[131]) und Lie[132]) bemerkenswerte Eigentümlichkeiten fanden. Dann will ich noch einige Flächen nennen, die aus einer Oberfläche zweiten Grades abgeleitet sind (Ort der Krümmungscentren; Fusspunktflächen, Aspidalflächen etc.), sowie die Örter der Spitzen der Kegel zweiten Grades, die m Gerade berühren und durch $(6 - m)$ Punkte gehen, welche Flächen eingehend von Chasles,[133]) Lüroth,[134]) Hierholzer[135]) und von Cayley[136]) studiert wurden, da sie zur Auflösung gewisser Probleme aus der Theorie der Charakteristiken der einfach unendlichen Systeme von Kegeln zweiter Ordnung dienten; schließlich diejenigen, welche unendlich viele lineare

123) *Math. Ann.* 5.

124) *Annali di Matem.* II, 4.

125) *Prager Abhandlungen* VI, 5.

126) *Mémoires de Bordeaux* II, 3.

127) *Über die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Kurven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen. Math. Ann.* 7.

128) *Lincei Mem.* 1878—1879.

129) *Math. Ann.* 4.

130) *Math. Ann.* 27, 29. S. auch eine Abhandlung von Eckardt daselbst 7).

131) *Math. Ann.* 3.

132) das. 14, 15. S. auch eine Bemerkung von Dino, *Napoli Rend.* 19.

133) *Comptes rendus,* 52.

134) *Journ. für Math.* 68.

135) *Math. Ann.* 2.

136) *Proc. math. Soc.* 4; *Comptes rendus,* 1861; vgl. Hungady *Journ. für Math.* 92.

Transformationen zulassen, die kontinuierlich aufeinander folgen;[137]) diejenigen, welche die eigenen reziproken Polaren in bezug auf unendlich viele Flächen zweiten Grades sind,[138]) diejenigen, welche durch reciproke Cremonasche Systeme erzeugt werden,[139]) und diejenigen, welche dieselben Symmetrie-Ebenen wie ein reguläres Polyeder besitzen.[140])

Die Untersuchungen über die Oberflächen, mit denen wir uns bis jetzt beschäftigt haben, behandeln Eigenschaften, welche vermittelst einer wohl bekannten Betrachtungsweise auf das Gebiet der projektiven Geometrie zurückgeführt sind oder sich darauf zurückführen lassen. Es giebt aber noch viele andere Untersuchungen, welche Eigenschaften von ganz anderer Art behandeln, die größtenteils auf keine Weise sich als projektiv betrachten lassen, da die Gruppe der Transformationen, die zu ihnen gehört, nicht die der projektiven Geometrie ist.[141]) Diese bilden zusammen mit den Studien, die sich auf die Infinitesimaleigenschaften der Raumkurven beziehen (über welche wir einiges im folgenden Paragraphen sagen werden), einen sehr wichtigen Zweig der Geometrie für sich sowohl, als auch wegen der Anwendungen, welche man von ihnen in der Geodäsie und der mathematischen Physik machen kann; man kennt ihn unter dem Namen der Differentialgeometrie. Über die wesentlichen Punkte derselben wollen wir nun einiges sagen. Und da man den Ursprung dieses Teiles der Geometrie von dem Erscheinen der *Application de l'Analyse à la Géométrie*[142])

137) Klein und Lie, *Comptes rendus*, 70.

138) Fouret, *Bulletin de la Société philomatique*, VII, 1.

139) Jung, *Lincei Rend.* 1885 und 1886. S. auch zwei Bemerkungen über denselben Gegenstand, veröffentlicht von Visalli (ebendas. 1886).

140) Goursat, *Ann. Ec. norm.* III, 4; Lecornu, *Acta math.* 10.

141) Cfr. die bewunderungswerten *Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* von F. Klein (Erlangen, 1872).

142) Veröffentlicht im Jahre 1795 unter dem Titel: *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie.* Die letzte (fünfte) Ausgabe wurde von Liouville im Jahre 1850 besorgt und durch einen Anhang sehr wertvoller Noten bereichert.

von Monge datieren kann, und das spätere Werk, welches von grösserem Einflusse war, das von Gauß (1777—1855) ist, welches den Titel trägt: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*,[143]) so nehmen wir in unserer kurzen Darlegung die von Monge und Gauß angenommene Einteilung des Stoffes als Anhalt, indem wir zuerst besprechen, was diese selbst in Hinsicht auf die von ihnen behandelten Gegenstände geleistet haben, und dann vorführen, was ihre Nachfolger hinzugefügt haben.

Der erste Paragraph des Mongeschen Werkes bietet kein besonderes Interesse, da er nur die Bestimmung der Berührungsebenen und Normalen einer Oberfläche zum Zwecke hat; er kann also als Einleitung betrachtet werden. Die vier folgenden Paragraphen behandeln cylindrische Oberflächen, Kegel- und Rotationsflächen und solche, welche (um einen modernen Ausdruck zu gebrauchen) in einer linearen Kongruenz mit einer unendlich fernen Leitgeraden enthalten sind. Höchst bemerkenswert ist der folgende Paragraph, indem Monge dort bei der Besprechung der Enveloppen den wichtigen Begriff der Charakteristik und der Rückkehrkurve *(arête de rebroussement)* einer Enveloppe eingeführt hat; an diesen Paragraphen schließen sich die drei folgenden enge an; sie behandeln Röhrenflächen mit ebener Leitlinie (§ 7), Flächen, die als Linien größter Neigung gegen eine gegebene Ebene Gerade von konstanter Neigung haben (§ 8), und schließlich Enveloppen einer Oberfläche, die sich unter der Bedingung bewegt, daß ein mit ihr unveränderlich verbundener Punkt eine gegebene Kurve durchläuft (§ 9).[144]) — Von da ab beginnt die Theorie der partiellen Differential-

143) Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen überreicht am 8. Oktober 1827 und abgedruckt im 6. Bande der *Commentationes recentiores societatis Gottingensis.* Diese *Disquisitiones* stehen im 4. Bande der von der genannten Gesellschaft herausgegebenen *Werke* von Gauß, ferner in französischer Übersetzung in der angeführten Liouvilleschen Ausgabe des Werkes von Monge.

144) Wenn $x=e(t)$, $y=f(t)$, $z=g(t)$ die Ausdrücke der Koordinaten der Punkte dieser Kurve in Funktionen eines Parameters t sind und $F(x, y, z)=0$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche, so ist die fragliche Enveloppe die der Oberfläche $F\{x+e(t),\ y+f(t),\ z+g(t)\}=0$.

gleichungen die wichtige Rolle zu spielen, die Monge ihr in der analytischen Geometrie zugewiesen hat; von diesem Punkte an zeigt es sich, daß es in vielen Fällen für die Bestimmung der Natur einer Oberfläche nützlicher und bequemer ist, eine Differentialgleichung für sie zu haben, als eine solche in endlichen Ausdrücken. Beispiele hierfür bieten die Flächen, die in einem speziellen linearen Komplexe enthalten sind mit einer unendlich fernen oder endlichen Axe (von Monge im § 10 und § 11 behandelt), fernere Beispiele die abwickelbaren Flächen (§ 12), andere die im § 9 beschriebenen, andere schließlich die Örter beweglicher Kurven, von welchen ein Punkt eine feste Kurve durchläuft (§ 14).[145]) — Die Theorie der Krümmung einer Oberfläche in einem Punkte,[146]) sowie das Studium der Verteilung der Normalen derselben Fläche[147]) führen zu einer neuen Art von Flächen, die der Betrachtung wert sind; jene und diese finden sich im § 15, der sicherlich einer der wichtigsten des Mongeschen Werkes ist. Der Spezialfall des Ellipsoides ist im § 16 behandelt, derselbe enthält die Bestimmung der Krümmungslinien dieser Fläche.[148]) — Groß an Zahl und von großer Wichtigkeit sind die Fragen, zu denen die Theorie der Krümmung Anlaß giebt. Man kann z B. die Oberflächen untersuchen, bei denen der eine Krümmungsradius für jeden Punkt denselben Wert hat; Monge fand (§ 18), daß dieselben von einer Fläche von konstanter Form eingehüllt werden, die sich in der

---

145) Über solche Flächen sehe man die neue Arbeit von Lie (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* 7).

146) Vor Monge hatten sich schon Euler (*Histoire de l'Académie de Berlin*, 1766) und Meunier (*Mémoires de l'Académie des sciences de Paris* 10, 1776) mit diesem Thema beschäftigt.

147) Unter den neueren Arbeiten über die Krümmungslinien führen wir nur die von Hamilton, Frost und Cayley an, die sich als Aufgabe gestellt haben, zu finden, wie dieselben um einen Nabelpunkt herum verteilt sind (*Quart. Journ.* 12).

148) Vgl. hierzu eine von Cremona veröffentlichte Arbeit in den *Bologna Mem.* III, 1. Wir führen hier auch einige Noten von Darboux an (*Comptes rendus*, 84, 92, 97), welche die Bestimmung der Krümmungslinien einiger spezieller bemerkenswerter Flächen zum Zwecke haben.

vorhin (in den §§ 9 und 13) angegebenen Weise bewegt. Man kann dagegen auch voraussetzen, daß in jedem Punkte die beiden Krümmungsradien gleich und von gleichem Sinne seien: die Oberfläche ist dann eine Kugel. Wenn dagegen die beiden Krümmungsradien in jedem Punkte gleich, aber von entgegengesetztem Sinne sind, so ist die Fläche eine Minimalfläche.[149]) Oder es sei in jedem Punkte einer der Krümmungsradien gleich groß (§ 21).[150])

An die Theorie der Krümmung schließen sich dann die Studien über die Röhrenflächen mit beliebiger Leitkurve (§§ 22 und 26) und über diejenigen Flächen, bei welchen alle Normalen eine gegebene Kugel (§ 23), einen gegebenen Kegel (§ 24) oder eine gegebene Developpabele (§ 25) berühren. — Für einige dieser Flächenfamilien hat Monge die Konstruktion angegeben, für alle die Gleichungen, sei es die Differentialgleichungen oder die endlichen, und, da er sich das Problem gestellt und gelöst hat, von jenen zu diesen zu gelangen, so verdient denn sein grosses Werk, daß es auch von denen, welche sich mit der Analysis des Unendlichen beschäftigen, eingehend studiert werde.

Kurz nach dem Erscheinen des Werkes von Monge wurde die Differentialgeometrie durch eine höchst wichtige Arbeit bereichert, die *Developpements de Géométrie* von Ch. Dupin (1813). In derselben wird unter anderem der Begriff der konjugierten Tangenten eines Punktes einer Oberfläche und der der Indikatrix eingeführt; dort sind die asymptotischen Linien (Haupttangentenkurven)[151]) untersucht, und

149) Die Differentialgleichung der Minimalflächen verdanken wir Lagrange (*Miscellanea Taurinensia*, 1760—1761); die geometrische Interpretation derselben wurde ein wenig später von Meunier gegeben (vgl. Note 146).

150) An die in den §§ 18 und 21 der *Application* gemachten Untersuchungen knüpft sich eine Abhandlung von O. Rodrigues, die sich in der *Correspondance sur l'École polytechnique* 3 findet.

151) Außer den Krümmungs- und asymptotischen Linien auf einer Fläche sind noch diejenigen bemerkenswert, bei denen die Schmiegungskugel in einem beliebigen ihrer Punkte die Oberfläche selbst berührt. Dieselben wurden von Darboux (*Comptes rendus* 83) und von Enneper (*Göttinger Nachrichten*, 1871) studiert.

der berühmte Satz bewiesen, der unter dem Namen des Dupinschen Theorems allgemein bekannt ist.

Als Fortsetzung des Mongeschen Werkes kann man die zahlreichen Untersuchungen über Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien ansehen, die man Dupin,[152]) Alfred Serret (1819—1885),[153]) O. Bonnet,[154]) Dini,[155]) Enneper (1830—1885),[156]) Darboux,[157]) Picart,[158]) Lecornu,[159]) Dobriner,[160]) Voretsch[161]) und anderen verdankt.

Von derselben Art, aber von größerer Allgemeinheit sind die wichtigen Untersuchungen von Weingarten über solche Oberflächen, bei denen in jedem Punkte der eine Krümmungsradius eine Funktion des anderen ist,[162]) welche Untersuchungen Dini (a. O.), Beltrami[163]) und Lie[164]) zur Bestimmung der windschiefen Oberflächen mit derselben Eigenschaft geführt haben. Dasselbe kann man von den Untersuchungen sagen, welche man ebenfalls Weingarten verdankt[165]) und die sich auf Oberflächen beziehen, deren Normalen eine andere vorgelegte Oberfläche berühren. — Dem § 20 des Mongeschen Werkes können wir die zahl-

152) Dupin fand (*Applications de Géométrie et de Méchanique,* 1822), daß die einzigen Oberflächen, bei denen sämtliche Krümmungslinien Kreise sind, die Kugel, der Rotations-Kegel und -Cylinder und die Cyklide sind, welch letztere er schon als die Enveloppe einer Kugel erkannt hatte, die sich so bewegt, daß sie immer drei feste Kugeln tangiert.

153) *Liouvilles Journ.* 13.

154) *Journ. Éc. polyt.* 19, 35; *Comptes rendus* 42.

155) *Atti dell' Accademia dei Quaranta,* 1868—1869; *Annali delle Università toscane,* 1869; *Annali di Matem.* II, 1, 4.

156) *Göttinger Abh.* 13, 16, 23; *Journ. für Math.* 94.

157) *Comptes rendus,* 96.

158) das. 46.

159) *Journ. Éc. polyt.* 53.

160) *Journ. für Math.* 94.

161) *Göttinger Dissertation,* 1883.

162 *Journ. für Math.* 59.

163) *Annali di Matem.* I, 8.

164) *Archiv for Math. og Naturvidenskab,* 4; *Bull. Sciences math.* II, 4.

165) *Journ. für Math.* 62.

reichen Abhandlungen anschließen, welche die Minimalflächen behandeln. Wir führen zunächst die von Steiner[166]) und Weierstraß[167]) an, die sich mit der allgemeinen Theorie befassen, dann die von Scherk[168]) und Bonnet,[169]) welche einige Spezialfälle derselben bearbeitet haben; Serret[170]) beschäftigte sich dann mit solchen, die durch zwei Gerade hindurch gehen, Riemann[171]) und Weierstraß[172]) mit solchen, die einen gegebenen Umriß haben, Geiser[173]) mit algebraischen, Noevius[174]) mit solchen periodischen, welche unendlich viele Geraden und unendlich viele ebene geodätische Linien besitzen; Catalan[175]) mit solchen, die als geodätische Linie eine Parabel haben, Henneberg[176]) mit denen, welche eine semikubische Parabel als geodätische Linie haben; Bonnet[177]) untersuchte solche, auf welchen sich eine Schar von ebenen Krümmungslinien befindet; Bour[178]) diejenigen, welche auf eine Rotationsfläche sich abwickeln lassen; Schwarz solche, die durch ein windschiefes Vierseit bestimmt sind[179]) oder die von Kegeln eingehüllt sind,[180]) und solche, die ohne algebraisch zu sein, doch algebraische Kurven enthalten;[181])

166) *Berliner Ber.* 1840; *Journ. für Math.* 24.

167) *Berliner Ber.* 1866.

168) *Abhandlungen der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig* 4; *Journ. für Math.* 13.

169) *Liouvilles Journ.* II, 5.

170) das. I, 11.

171) *Göttinger Abh.* 13, oder *Gesammelte Werke* S. 283 und 417. Niewenglowski hat die Riemannschen Untersuchungen in elementarer Form dargelegt in den *Ann. Éc. norm.* II, 9.

172) *Berliner Ber.* 1867.

173) *Math. Ann.* 1.

174) *Akademiens Afhandlingar, Helsingfors,* 1883.

175) *Journ. Éc. polyt.* 37.

176) *Heidelberger Dissertation,* 1875.

177) *Comptes rendus* 41; vgl. Enneper, *Zeitschr. f. Math.* 7, 9.

178) *Journ. Éc. polyt.* 39.

179) *Bestimmung einer speziellen Minimalfläche* (Berlin, 1871). Vgl. Cayley, *Quart. Journ.* 14.

180) *Journ. für Math.* 80.

181) das. 87; *Comptes rendus* 96.

Enneper[182]) untersuchte diejenigen, welche unendlich viele Kreise enthalten, u. s. w. Andere Fragen wurden von Mathet[183]) behandelt, von Beltrami,[184]) von Lie,[185]) Kiepert,[186]) Henneberg,[187]) Ribaucour,[188]) Bianchi[189]) und Pincherle.[190]) Schließlich ist die Theorie der Minimalflächen einer bemerkenswerten Erweiterung fähig, die von Lipschitz[191]) entdeckt wurde.

Wir gehen jetzt dazu über, kurz auseinander zu setzen, welches die hervorragenderen Stellen des zweiten Werkes sind, dem wir, wie schon gesagt, die wichtigsten Lehren der Differentialgeometrie verdanken, der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* von Gauß.

Schon zu Ende des ersten Paragraphen derselben finden wir einen höchst wichtigen Begriff, nämlich den der sphärischen Abbildung einer Oberfläche, dessen Fruchtbarkeit vielfache Anwendungen, die von ihm gemacht sind, dargethan haben. Kurz darauf (§ IV) treffen wir die zwei unabhängigen Veränderlichen, vermittelst derer man die Koordinaten der Punkte einer Oberfläche ausdrückt, d. h. die krummlinigen Koordinaten auf einer Oberfläche. (Vgl. auch die §§ XVII und XIX). Dann enthält § VI die Erweiterung der Betrachtung, die man gewöhnlich zur Grundlage der Theorie der Krümmung der ebenen und unebenen Kurven nimmt, auf den Raum, aus welcher Erweiterung der Begriff des Krümmungsmaßes einer Oberfläche in einem gewöhn-

182) *Zeitschr. f. Math.* 14; *Göttinger Nachr.* 1866.

183) *Liouvilles Journ.* II, 8.

184) *Bologna Mem.* II, 7. Die wunderschöne Einleitung dieser Abhandlung enthält die Geschichte der Theorie der Minimalflächen.

185) *Archiv for Math. og Naturv.* 3, 4, 6; *Math. Ann.* 14, 15.

186) *Journ. für Math.* 81, 85.

187) *Annali di Matem.* II, 9.

188) *Étude des élassoides. Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique* 44.

189) *Giorn. di Matem.* 22.

190) *Lombardo Rend.* 1876; *Giorn. di Matem.* 14.

191) *Journ. für Math.* 78.

lichen Punkte hervorgegangen ist.[192]) Bekanntlich ist dasselbe gleich dem Produkte aus den beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche in jenem Punkte[193]) (§ VIII). Das Krümmungsmaß einer Oberfläche kann man sowohl durch die gewöhnlichen kartesischen Koordinaten (§§ VII und IX) als auch durch die krummlinigen Koordinaten der Oberfläche ausdrücken (§§ X und XI).[194])

Bei der Untersuchung dieses letzteren Ausdruckes bieten sich die Coefficienten E, F, G des Ausdruckes des Kurvenelementes dar, deren Bedeutung in der Theorie der Oberflächen, die auf eine andere abwickelbar sind[195]) (§ XII), Gauß zuerst hervorgehoben hat. Dabei stellte er eine neue Betrachtungsweise der Oberflächen auf (§ XIII), indem er dieselben als unendlich dünne, biegsame und unausdehnbare Körper ansah. Die folgenden Paragraphen der Abhandlung von Gauß behandeln die geodätischen Linien und haben die Bestimmung ihrer Differentialgleichungen zum Zwecke (§ XIV und XVIII), dann die Übertragung der Polarkoordinaten, des Kreises (§ XV), der Parallelkurven (§§ XVI), auf die Geometrie auf einer Oberfläche, sowie die Berechnung der totalen Krümmung eines geodätischen Dreiecks (§ XX). Die §§ XXI und XXII beziehen sich auf die Transformation des Ausdruckes für das Kurvenelement, die übrigen behandeln andere Fragen aus der Geodäsie und dürften daher unsere Aufmerksamkeit nicht auf sich ziehen.

192) Das Studium der Krümmung einer Oberfläche in einem singulären Punkte wurde von Painvin im *Journ. für Math.* 72 angestellt.

193) Ein analoger Satz wurde neuerdings von Sturm entdeckt (*Math. Ann.* 21).

194) Einige Vervollkommnungen und Ergänzungen dieses Teiles der Gaußischen Abhandlung wurden von Liouville (*Journ. Éc. polyt.* 24), von Baltzer (1818—1887) (*Leipziger Berichte* 1872) und durch von Escherich (*Grunerts Arch.* 57) vorgenommen.

195) Der Satz von Gauß: „Damit eine Oberfläche auf eine andere abwickelbar sei, ist notwendig, daß die Krümmung in den entsprechenden Punkten gleich sei", wurde auf verschiedene Arten von Liouville (*Liouvilles Journ.* 12), von Bertrand, Puiseux und Diguet (das. 13) bewiesen. Vgl. auch Minding, *Journ. für Math.* 19.

Schon aus diesen flüchtigen Andeutungen ersieht man, wie reich an fundamentalen Begriffen die Abhandlung von Gauß ist. Die Entwickelungen, die sie gehabt, und die vielen Arbeiten, welche sie hervorgerufen, und von denen wir noch kurz zu sprechen haben, werden ihre Bedeutung noch klarer machen. Unter diesen Arbeiten muß man den schönen *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, die Beltrami im zweiten und dritten Bande des *Giornale di Matematiche* veröffentlicht hat, eine hervorragende Stelle einräumen, dann den Abhandlungen von demselben Verfasser *Dalle variabili complesse su una superficie qualunque,*[196]) *Teoria generale dei parametri differenziali*[197]) und *Zur Theorie des Krümmungsmasses.*[198]) Bemerkenswert sind ferner die Studien von Bonnet[199]) und von Darboux[200]) über die sphärische Abbildung der Oberflächen, die sich an die ersten in den *Disquisitiones* enthaltenen Untersuchungen anknüpfen. Der Begriff der Krümmung führte zum Studium der Oberflächen mit konstanter (positiver oder negativer) Krümmung, dem so viele ausgezeichnete Geometer ihre Kräfte gewidmet haben. Unter diesen führen wir die zwei Arbeiten von Beltrami an: *Risoluzione del problema. Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le geodetiche vengano rappresentate da linee rette*[201]) und *Saggio di una interpretazione della Geometria non-euclidea,*[202]) dann die Schriften von Dini,[203]) Lie,[204])

196) *Annali di Matem.* II, 1.

197) *Bologna Mem.* II, 8.

198) *Math. Ann.* 1.

199) *Comptes rendus* 37.

200) das. 44, 46, 57, 67.

201) *Annali di Matem.* I, 7. — Das allgemeinere Problem der Bestimmung zweier Oberflächen, so daß jedem Punkte der einen ein Punkt oder eine Gruppe von Punkten der anderen entspricht, und daß den geodätischen Linien der einen geodätische Linien der anderen korrespondieren, wurde später von Dini behandelt. (*Annali di Matem.* II, 3).

202) *Giorn. di Matem.* 6.

203) *Comptes rendus,* 1865.

204) *Archiv for Math. og Nat.* 4, 5.

Bianchi,[205]) Bäklund,[206]) Darboux[207]) und Dobriner.[208]) Von derselben Art, aber allgemeiner, sind die Studien von Christoffel[209]) über die Bestimmung der Gestalt einer Oberfläche mit Hilfe von auf ihr selbst genommenen Maßen und von Lipschitz[210]) über die Oberflächen, welche bestimmte auf die Krümmung bezügliche Eigenschaften haben, oder bei welchen der Ausdruck des Kurvenelements von vornherein festgesetzt ist.

An den Abschnitt der Gaußischen Abhandlung, welcher die geodätischen Linien behandelt, knüpfen sich einige Arbeiten von Joachimsthal (1818—1861),[211]) Schering,[212]) Beltrami,[213]) die von Lie[214]) gemachte Einteilung der Oberflächen auf Grund der Transformationsgruppen ihrer geodätischen Linien und die Untersuchungen über geodätische Kurven von demselben Verfasser.[215]) Mit demjenigen Abschnitte, welcher sich auf die Abwickelbarkeit der Oberflächen bezieht, steht eine wichtige Arbeit von Minding in enger Beziehung,[216]) in der zum ersten Male die Frage aufgestellt ist, ob die Gleichheit der Krümmung in entsprechenden Punkten eine hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit zweier Oberflächen sei: er gelangte für den allgemeinen Fall zu einem negativen Resultate, zu einem posi-

205) *Giorn. di Matem.* 16, 20, 21.

206) *Lund Årskrift* 19.

207) *Comptes rendus* 96, 97.

208) *Acta math.* 9.

209) *Journ. für Math.* 64.

210) *Berliner Ber.* 1882—1883. — Hieran schließt sich die Schrift von Lilienthal's: *Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und der geradlinigen Strahlensysteme* (Bonn, 1886).

211) *Journ. für Math.* 26, 30. — Joachimsthals Vorlesungen: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung* erschienen nach seinem Tode (Leipzig, 2. Auflage, 1881).

212) *Göttinger Nachr.* 1867.

213) *Lombardo Atti* II, 1.

214) *Programm der Universität von Christiania,* 1879.

215) *Math. Ann.* 20.

216) *Journ. für Math.* 6, 18, 19.

tiven dagegen für den Fall konstanter Krümmung. Dasselbe gilt von den Arbeiten von Bour[217]) (1832—1866), Codazzi[218]) und Bonnet,[219]) welche für preiswürdige Antworten auf die im Jahre 1861 von der Pariser Akademie der Wissenschaften gestellte Frage erkannt worden sind. Derselbe Gegenstand oder verwandte Gegenstände wurden dann in den Abhandlungen von Christoffel,[220]) von Mangoldt,[221]) Weingarten,[222]) Brill,[223]) Minding,[224]) Jellet,[225]) Dini,[226]) Enneper,[227]) Razzaboni,[228]) Lecornu,[229]) Beltrami[230]) und vielen anderen behandelt.

Die schöne von Gauß gegründete Theorie der krummlinigen Koordinaten einer Oberfläche ließ den Wunsch entstehen, eine analoge Theorie für den Raum zu haben. Schon im Jahre 1837 stellte Lamé sie für einen Spezialfall auf, nämlich für den der elliptischen Koordinaten,[231]) später wies er auf die orthogonalen krummlinigen Koordinaten

---

217) *Journ. Éc. polyt.* 39.

218) *Mém. prés.* 27 (1879) *(Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres).*

219) *Journ. Éc. polyt.* 41, 42.

220) *Berliner Abh.*, 1869.

221) *Journ. für Math.* 94.

222) *Berliner Ber.* 1882.

223) *Münchener Abh.* 14.

224) *Journ. für Math.* 6.

225) *Irish Trans.* 22, I. T.

226) *Giorn. di Matem.* 2.

227) *Göttinger Nachr.* 1875.

228) *Giorn. di Matem.* 21.

229) *Journ. Éc. polyt.* 48.

230) *Bologna Mem.* IV, 3.

231) *Mém. prés.* 5; *Liouvilles Journ.* 2. — Unter den vielen Anwendungen, die man von den elliptischen Koordinaten gemacht hat, wollen wir nur diejenigen anführen, die Jacobi davon gemacht hat bei der Bestimmung der geodätischen Linien (*Journ. für Math.* 14; *Comptes rendus* 8; *Liouvilles Journ.* 6) und bei einigen Fragen der Dynamik. S. *Vorlesungen über Dynamik*, 1866 in erster, 1884 in zweiter Ausgabe als Supplementband zu den *Gesammelten Werken* erschienen.

hin[232]) und konstruierte dann die Theorie derselben,[233]) ohne ihre Anwendung[234]) und Entwickelung[235]) zu vernachlässigen. Die berühmten *Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (Paris, 1859) von Lamé fassen zusammen und vervollständigen die glänzenden Resultate, die von Lamé in diesem Zweige der Geometrie erhalten waren. In der Folge haben sich viele andere mit demselben beschäftigt. Vor allen führe ich Aoust an, der ihm viele und wichtige Arbeiten widmete,[236]) dann Brioschi,[237]) Codazzi,[238]) Chelini (1802—1878),[239]) Darboux,[240]) Combescure,[241]) Levy,[242]) Royer[243]) und noch andere. Hierzu sehe man noch die Schriften, welche dreifache Systeme orthogonaler Oberflächen behandeln und von denen ich nur diejenigen von Bouquet,[244]) A. Serret,[245]) Bonnet,[246]) Catalan,[247]) Moutard,[248]) Darboux,[249]) Cayley,[250]) Ribaucour,[251])

---

232) *Journ. Éc. polyt.* 23.

233) *Liouvilles Journ.* 5.

234) das. 4.

235) das. 8.

236) *Comptes rendus* 48, 54; *Journ. für Math.* 58; *Annali di Matem.* I, 6 und II, 1, 3, 5.

237) *Annali di Matem.* II, 1.

238) das. II, 1, 2, 4, 5.

239) *Bologna Mem.* 1868—1869.

240) *Ann. Éc. norm.* II, 7.

241) *Ann. Éc. norm.* I, 4.

242) *Journ. Éc. polyt.* 43.

243) *Annales des mines* VII, 5.

244) *Liouvilles Journ.* 11.

245) das. 12.

246) *Comptes rendus* 54.

247) *Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique,* 32.

248) *Comptes rendus* 59.

249) das. 59, 60, 67, 76; *Ann. Éc. norm.* I, 2; II, 3.

250) *Comptes rendus* 74, 75; *Phil. Trans.* 163. Vgl. Weingarten, *Journ. für Math.* 83.

251) *Comptes rendus* 76.

Weingarten,[252]) Schläfli,[253]) Hoppe,[254]) Bianchi[255]) und Molins[256]) nennen will.

Von den Arbeiten, welche spezielle Oberflächen behandeln, die nicht zu bis jetzt besprochenen Kategorien gehören, führen wir die von Lie[257]) an, welche sich auf Oberflächen beziehen, die infinitesimale lineare Transformationen in sich selbst zulassen; dann die von Enneper,[258]) die sich auf Oberflächen mit speziellen Meridiankurven beziehen, ferner die von Cayley[259]) und Weingarten[260]) und die von Willgrod[261]) über Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden; schließlich die von Bianchi[262]) über Schraubenflächen.

Ein bemerkenswerter Fortschritt in der analytischen Infinitesimalgeometrie der Oberflächen wurde durch die Bemühungen de Salverts geschaffen, der in einigen eleganten Arbeiten,[263]) wahrscheinlich hervorgerufen durch die schönen *Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes* von Hesse, zeigte, wie man durch Benutzung der Gleichung einer Oberfläche in ihrer allgemeineren Form, $f(x, y, z) = 0$, ein bei weitem bequemeres System von Formeln für die Lösung gewisser Probleme aufstellen konnte, als wenn die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ zu Grunde gelegt wird.

---

252) *Journ. für Math.* 85.

253) das. 76; vgl. Darboux, *Comptes rendus* 84.

254) *Grunerts Arch.* 55, 56, 57, 58 und 63.

255) *Giorn. di Matem.* 21, 22; *Annali di Matem.* II, 13; *Lincei Rend.* 1886.

256) *Mémoires de l'Académie de Toulouse* VIII, 1.

257) *Archiv for Math. og Naturv.* 7.

258) *Göttinger Abh.* 19. — Wenn u der Winkel der Normalen der Oberfläche in einem Punkte mit der z-Axe, und v der Winkel der Projektion derselben auf die xy-Ebene mit der x-Axe ist, so nennt man nach Enneper Kurven, deren Gleichungen $u = const.$ oder $v = const.$ sind, Meridiankurven.

259) *Comptes rendus* 74; *Proc. math. Soc.* 4.

260) *Berliner Ber.* 1883.

261) *Göttinger Dissertation*, 1883.

262) *Giorn. di Matem.* 17.

263) *Mémoires de la société scientifique de Bruxelles* 5, 7, 8.

Über Differentialgeometrie existieren noch einige gute Darlegungen. Eine verdankt man Hoppe; sie trägt den Titel: *Elemente der Flächentheorie;* eine andere wurde von Brisse unternommen;[264]) die neuesten sind die von Bianchi in seinen sehr schönen *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, 1886) und die, welche Darboux in seinen *Leçons sur la théorie générale des surfaces* begonnen hat, von denen wir schon den ersten Teil besitzen (Paris, 1887).

Wir wollen diesen Abschnitt beschließen, indem wir noch bemerken, daß die Zuhilfenahme der Analysis für das Studium der Infinitesimalgeometrie nicht notwendig ist; vielmehr haben Bertrand[265]) und Bonnet[266]) zuerst gezeigt, welchen Nutzen man bei diesen Studien auch aus synthetischen Betrachtungen ziehen kann. Außerdem enthalten der erste Band des *Traité de calcul différential et intégral* von Bertrand und der *Traité de géométrie descriptive* von de la Gournerie[267]) und eine große Zahl von überaus schönen Abhandlungen von Mannheim[268]) bemerkenswerte geometrische Untersuchungen, welche dem Zweige der Wissenschaft des Raumes, mit dem wir uns eben beschäftigt haben, angehören.

---

264) *Ann. Éc. norm.* II, 3; *Journ. Éc. polyt.* 53.

265) *Liouvilles Journ.* 9, 12.

266) *Journ. Éc. polyt.* 30, 32; *Liouvilles Journ.* 14; *Comptes rendus* 54.

267) Man sehe auch die *Thèse* (Dissertation) von Picart, *Essai d'une théorie géométrique des surfaces* (Paris, 1863).

268) *Liouvilles Journ.* II, 17 und III, 4; *Bull. Soc. math.* 2, 5, 6; *Comptes rendus* 74, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 88; *Proc. math. Soc.* 12; *The Messenger of Mathematics* II, 8.

IV.

Untersuchungen über die Gestalt der Kurven und Oberflächen. Abzählende Geometrie.

Bei der Besprechung der bedeutenderen Fortschritte, welche die Theorie der Kurven und die der Oberflächen gemacht, haben wir zwei wichtige Kategorien der Untersuchung übergangen, weil wir dieselben besser in einem besonderen Abschnitte unserer Arbeit zusammenfassen können.

Die erstere umfaßt eine Reihe von Studien besonderer Natur und hat zum Zwecke die Bestimmung der Gestalt, welche die Kurven und Oberflächen von gegebener Ordnung annehmen können, und ich halte es für angemessen, bei diesen eine Zeit lang zu verweilen.

Die Bestimmung der Gestalt der Kurven zweiter Ordnung reicht schon in das Altertum. Für dieselbe bedurfte es auch nicht eines hervorragenden Geistes, wenn man bedenkt, daß die Alten jene Kurven als Schnitte eines Kreiskegels betrachteten.

Dagegen ist die Bestimmung der Gestalt, welche die Kurven dritter Ordnung annehmen können, nicht ohne Schwierigkeit. Newton überwand diese, indem er lehrte, daß alle Kurven dritter Ordnung durch Projektion von fünfen derselben, welche er divergierende Parabeln nannte, erhalten werden können.[1]) Zu dieser ersten Einteilung der Formen

1) *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706). Indem wir eine Bemerkung von Bellavitis (1803—1880) verwerten (s. § 107 der Schrift *Sulla classificazione delle curve di terzo ordine, Memorie della Società italiana delle scienze residente in Modena*, Bd. 25, II. Teil S. 34), geben wir dieses Resultat wieder, indem wir sagen, daß jede Kurve

der Kurven dritter Ordnung fügte Chasles[2]) eine weitere hinzu, die, obwohl sie auf einem ganz anderen Gedanken beruhte, mit der von Newton eine nicht zu verkennende Analogie bietet. Nach ihr kann man die Formen der Kurven dritter Ordnung sämtlich auffinden durch Projektion von fünfen derselben, die symmetrisch in bezug auf ein Zentrum sind. Eine dritte Methode der Einteilung endlich stützt sich auf das konstante Doppelverhältnis der vier Tangenten, die man an die allgemeine Kurve dritter Ordnung von einem ihrer Punkte aus ziehen kann; diese wurde von Durège entwickelt.[3])

---

dritter Ordnung sich durch eine geeignete projektive Transformation auf eine der folgenden Formen bringen läßt: Kurve, bestehend aus einem Schlangenzuge und einem Ovale *(parabola campaniformis cum ovali)*, Kurve mit einem Doppelpunkte *(parabola nodata)*, Kurve, bestehend aus einem Schlangenzuge *(parabola pura)*, Kurve mit einem isolierten Punkte *(parabola punctata)*, Kurve mit einer Spitze *(parabola cuspidata)*. Unter den Beweisen, die für diesen Satz gegeben sind, führe ich den von Möbius an, der sich auf die Prinzipien der analytischen Sphärik gründet (*Gesammelte Werke*, II. Bd. S. 89—176), und den, der aus der Klassifikation von Bellavitis (s. oben) hervorgeht. An Möbius schließt sich an: M. Baur, *Synthetische Einteilung der ebenen Kurven III. Ordnung* (Stuttgart, 1888). Dann bemerke ich noch hierzu, daß die Einteilungen, die von Möbius und Bellavitis (fast gleichzeitig, da die erste 1852 veröffentlicht wurde und die zweite 1851 geschrieben und 1855 veröffentlicht wurde) vorgeschlagen sind, gemeinsam haben, daß sie die Kollineation als Grundlage der Bildung der Gattungen, die Affinität zur Grundlage der Bildung der Arten dieser Kurven nehmen. Plückers Einteilung befindet sich im *System der analytischen Geometrie*. J. W. Newman hat der *British Association for the Advancement of Science* (vgl. Report 1869—1870) eine Diskussion der Formen der ebenen kubischen Kurven und eine daraus sich ergebende Nomenklatur vorgelegt, die von der gewöhnlich üblichen abweicht.

2) *Aperçu historique*, Note 20.

3) *Journ. für Math.* 75 und 76. Wir können hinzufügen, daß Reye im Anhange der 3. Auflage des ersten Teiles seiner *Geometrie der Lage*, der vor wenigen Monaten erschienen ist, eine neue und elegante Methode zur Bestimmung der Formen der ebenen kubischen Kurven einführt, indem er sie als die Jacobischen Kurven von Kegelschnittnetzen auffaßte.

Bei weitem grössere Schwierigkeit bietet das Studium der Gestalt der ebenen Kurven vierter Ordnung, die schon angeführten Arbeiten von Bragelogne, Euler und Plücker bilden hierzu einen wichtigen Beitrag. Es scheint aber nicht, daß man diese — dasselbe gilt auch von den schon genannten auf die kubische Kurve bezüglichen — als die Grundlage zu einer allgemeinen Theorie der Gestalt der ebenen Kurven ansehen darf; vielmehr muß man dieselben als die ersten Vorläufer jener Lehren betrachten, die man heute als eine feste Grundlage dieser Theorie ansieht. Solche Lehren gehören in das Gebiet der synthetischen Geometrie, zum Teil aber waren sie das Resultat der Anwendung der Abelschen Funktionen auf die Wissenschaft der Ausdehnung. Von den ersteren wurden einige von Staudt in seiner *Geometrie der Lage*[4]) auseinandergesetzt und beziehen sich auf die Gestalten der ebenen Polygone und der Polyeder, die paaren und die unpaaren Züge der Kurven, die Rückkehrelemente der Figuren; andere wurden von Tait[5]) angegeben und von J. Meyer entwickelt,[6]) andere schließlich von Hart angedeutet[7]) und mit vielem Glücke von E. Kötter verallgemeinert.[8]) Die zweiten sind fast alle aus der Schule von Klein hervorgegangen. Da ich auf die vielen Einzelheiten dieses Gegenstandes nicht eingehen kann, so möge es hier genügen, unter den schon erhaltenen Resultaten einige besondere Sätze über die Kurve vierter Ordnung anzuführen, die man Zeuthen[9]) und Crone[10]) verdankt; dann

4) §§ 12, 13, 14, 15.

5) *The Messenger of Mathematics* II, 6.

6) *Anwendung der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Kurven, speziell der rationalen Kurven vierter und fünfter Ordnung* (Münchener Dissertation, 1878).

7) *Irish Trans.* 1875.

8) *Beiträge zur Theorie der Oskulationen bei ebenen Kurven dritter Ordnung* (Berliner Dissertation, 1884).

9) *Math. Ann.* 7, 10. S. übrigens die Abhandlung: *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver* (Abh. der Akad. der Wissensch. in Kopenhagen V, 10).

10) *Math. Ann.* 12; *Tidsskrift for Mathem.* IV, 1.

eine sehr wichtige Relation zwischen den Zahlen der reellen und imaginären Singularitäten einer ebenen Kurve, zu welcher Klein geführt wurde,[11]) als er die von Plücker[12]) und Zeuthen vorgeschlagenen Klassifikationen der Kurven vierter Ordnung studierte; ferner einen sehr schönen Lehrsatz,[13]) von Harnack (1851—1888) entdeckt, welcher dadurch, daß er eine unerwartete Beziehung zwischen der Form einer Kurve und ihrem Geschlechte enthüllte, die Wichtigkeit des letzteren von neuem bestätigte.

Wenn so die Theorie der Gestaltlichkeit der ebenen Kurven noch weit entfernt vom Zustand der Reife ist, so kann man von den analogen Untersuchungen über die Oberflächen sagen, daß sie sich noch in ihrer Kindheit befinden. Allgemeine Untersuchungen auf diesem Felde existieren meines Wissens nicht, außer denjenigen, die von Möbius in seiner *Theorie der elementaren Verwandtschaften* niedergelegt sind,[14]) und welche, so scharfsinnig und interessant sie auch sind, einen geschickten Nachfolger erwarten lassen, welcher die ganze Fülle derselben zu Tage fördert. Dasselbe gilt für gewisse originelle Gesichtspunkte, die in den vielen Arbeiten von Klein zerstreut sind. Für den Fortschritt der Geometrie würde es von höchstem Interesse sein, beide weiter entwickelt zu sehen; unglücklicherweise wird aber diese Theorie wenig betrieben, in den letzten Jahren ist vielleicht Rohn[15]) der einzige, der hierin einige Fortschritte gemacht hat, die wert sind, verzeichnet zu werden.

---

11) *Math. Ann.* 10. Vgl. auch Perrin, *Bull. Soc. math.* 6.

12) *Theorie der algebraischen Kurven* S. 249 figg. — Im Anschluß an Plücker mögen noch Beers *Tabulae curvarum quarti ordinis symmetricarum* (Bonn, 1862) erwähnt werden.

13) „Eine Kurve vom Geschlechte p kann höchstens aus $p+1$ Zügen bestehen". *Math. Ann.* 10. Der Spezialfall dieses Satzes, $p=0$, ist seit langer Zeit bekannt; schon Bellavitis hatte denselben in der vorher angeführten Abhandlung besprochen; er erklärt die Benennung *unicursal*, die von Cayley den rationalen Kurven gegeben war, und die von vielen noch heute gebraucht wird.

14) *Gesammelte Werke* 2, S. 433.

15) *Math. Ann.* 12, 13; *Leipziger Ber.* 1884.

Wenn auch die allgemeine Theorie ein bis jetzt noch unbefriedigtes Bedürfnis ist, so fehlt es doch nicht an Spezialuntersuchungen. Die Bestimmung der Gestalt der Oberflächen zweiten Grades übergehe ich als zu einfach und führe die der Oberflächen dritter Ordnung an, die mit Erfolg von Klein,[16]) Schläfli,[17]) Zeuthen[18]) gemacht ist, und neuerdings von Bauer durch die Untersuchung der Gestalt der parabolischen Kurve vervollständigt wurde;[19]) ferner die der Dupinschen Cykliden, die wir Maxwell[20]) verdanken; dann die der Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, die ebenfalls von Zeuthen[21]) herrührt; die der Oberflächen vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt, die von Crone[22]) ausgeführt ist; endlich die der Kummerschen Flächen und der Regelflächen viertes Grades, welche der Gegenstand wichtiger Untersuchungen von Rohn[23]) gewesen sind. Die reichhaltige Sammlung von Modellen von Ludwig Brill, die sich jedes Jahr um neue und interessante Serien vermehrt, zeigt das Interesse, welches das gelehrte Deutschland für vorliegende Untersuchungen hat.[24])

Was die Gestalt der Kurven doppelter Krümmung angeht, so existieren darüber bis jetzt noch keine allgemeinen Untersuchungen von Bedeutung; man kann sagen, daß sich dieselben auf die Beobachtungen beschränken, die Chr. Wiener[25])

---

16) *Math. Ann.* 6.

17) *Annali di Matem.* II, 5 und 7.

18) *Math. Ann.* 8.

19) *Münchener Ber.* 1883.

20) *Quart. Journ.* 9.

21) Siehe die schon zitierte Abhandlung: *Om Flader af fjerde Orden med Doppeltkeglesnit.*

22) *Om Flader af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnit* (Kopenhagen, 1881).

23) *Münchener Dissertation,* 1878; *Math. Ann.* 15, 18, 28, 29.

24) Für den, der sich mit der Konstruktion spezieller Oberflächen befassen will, führe ich die praktischen Regeln an, welche Hicks (*Messenger of Mathematics* II, 5) für die Konstruktion der Wellenfläche gegeben hat.

25) *Zeitschr. f. Math.* 25.

und Björling[26]) gemacht haben, indem sie die Modelle der gewöhnlichen Singularitäten einer Raumkurve konstruierten.

Eine zahllose Reihe wichtiger Untersuchungen hat die Bestimmung der Anzahl der geometrischen Gebilde zum Ziele, welche Bedingungen genügen, die hinreichen, eine endliche Zahl derselben festzulegen. Der Bézoutsche Lehrsatz, welcher die Zahl der Lösungen eines bestimmten Systems von algebraischen Gleichungen angiebt, ist fast immer nicht verwendbar für die Lösung solcher Fragen, da, während dieser Satz auf allgemeine Gleichungen ihres Grades sich stützt, die Gleichungen, welche man bei dem Versuche, diese Probleme analytisch zu lösen, erhält, von spezieller Form sind. Wahrscheinlich ist das der Grund dafür, daß diese Probleme größtenteils bis in verhältnismäßig neuerer Zeit ungelöst geblieben sind.[27])

Auf Chasles fällt der Ruhm, in seiner *Methode der Charakteristiken* ein feines und mächtiges Hilfsmittel gefunden zu haben (1864), mit dem er eine große Zahl von Problemen der angedeuteten Art für den Fall, daß die betrachteten Gebilde Kegelschnitte in einer Ebene sind, lösen konnte und einen Weg bahnte, um auch in dem Falle, wo die Ge-

---

26) *Modelle von Raumkurven- und Developpabelen-Singularitäten* (Lund, Gleerup, 1881).

27) Unter den von Steiner ausgesprochenen Sätzen, nach deren Ursprung wir, seine Nachfolger, vergebens suchen, finden sich einige derartige (s. *Journ. für Math.* 37, 45, 49; *Gesammelte Werke,* II. Bd. S. 389, 439 und 613), welche glauben lassen, daß er eine Methode besessen habe, um einige von den im Texte gekennzeichneten Problemen zu lösen. Etliche lassen sich durch eine quadratische Transformation beweisen, wie Berner in seiner Dissertation: *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berlin, 1864) gezeigt hat. — Jonquières (*Liouvilles Journ.* II, 6; *Comptes rendus,* 1864, 65 und 66) fand auch eine Weise, um zur Lösung einiger Probleme dieser Art zu gelangen, aber der von ihm eingeschlagene Weg (welcher der Hauptsache nach in einer Anwendung des Bézoutschen Satzes besteht) führte ihn unbedingt zu Irrtümern wegen uneigentlicher (fremder) Lösungen, die er nicht ausgeschieden hatte. Vgl. die schöne Abhandlung von Study in den *Math. Ann.* 27.

bilde beliebige sind, zur Lösung derselben zu gelangen.[28]) Der Hauptgedanke desselben war die fortwährende Betrachtung der ausgearteten Kurven und der systematische Gebrauch der Charakteristiken eines einfach-unendlichen Systemes von Kegelschnitten, d. h. der Zahlen, die angeben, wie viele Kegelschnitte des Systemes durch einen gegebenen Punkt gehen, wie viele eine gegebene Gerade berühren.

Dadurch, daß man diese Begriffe weiter ausdehnte, konnte man Hilfsmittel erhalten, die auf andere Figuren anwendbar sind. Chasles selbst entdeckte alsbald die Anwendung seiner Untersuchungen auf die Kegelschnitte im Raume[29]) und auf die Flächen zweiter Ordnung.[30]) Zeuthen und Maillard gaben neue Beispiele der Erweiterung, der eine in der wichtigen Abhandlung, die wir schon Gelegenheit hatten zu zitieren, *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*,[31]) der andere in seiner Dissertation *Recherches des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes*

---

28) *Comptes rendus*, 1864; vgl. auch Zeuthen, *Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af Keglesnit* (Kopenhagen, 1865) oder *Nouv. Ann.* II, 5; Dino, *Comptes rendus*, 1867. Die Bände der *Comptes rendus* von 1864 ab enthalten eine ungeheuere Anzahl von Lehrsätzen verschiedener Art, die von Chasles aufgestellt sind und deren Beweis sich auf die Theorie der Charakteristiken und auf das Korrespondenzprinzip stützt. Unter diesen Arbeiten ist eine der bemerkenswertesten diejenige, in welcher der Verfasser mit Hilfe des Korrespondenzprinzips die Zahl der Schnitte zweier Kurven in einer Ebene bestimmt (*Comptes rendus* 75). Die dort angewandte Beweisführung kann verallgemeinert werden und in vielen Fällen dazu dienen, die Zahl der Lösungen eines bestimmten Systemes von algebraischen Gleichungen zu finden. (S. Saltel, *Mémoires de l'Académie de Belgique* 24; *Comptes rendus* 81; Fouret, *Bull. Soc. math.* 1, 2; *Comptes rendus* 78.

29) *Comptes rendus* 61.

30) Ebendas. 62. S. auch Salmon, *Quart. Journ.* 1866; Schubert, *Journ. für Math.* 71 und 73. — Eine interessante Anwendung der Theorie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung auf das Studium der quadratischen (vorletzten) Polaren der Punkte des Raumes in bezug auf eine beliebige algebraische Fläche wurde von Zeuthen gemacht (*Annali di Matem.* II. 4).

31) Vgl. auch *Comptes rendus* 74, 75.

planes du troisième ordre;[32]) andere findet der Leser in den Schriften von Sturm über die kubischen Raumkurven[33]) und denen von Schubert über die ebenen Kurven dritter Ordnung und dritter und vierter Klasse, im Raume betrachtet.[34]) Ferner sind die von Chasles gemachten Betrachtungen enge mit denjenigen verbunden, welche in den wichtigen Abhandlungen von Cayley, *On the curves which satisfy given conditions*[35]) enthalten sind, sowie in einigen Arbeiten von Jonquières über Systeme von Kurven und Flächen.[36]) Endlich gehören hierher noch die Untersuchungen von Hirst[37]) und Sturm[38]) über Systeme von Projektivitäten und Korrelationen, sowie die von Zeuthen[39]) über die Plückerschen Charakteristiken der Enveloppen. Wir wollen noch bemerken, daß zwischen den Systemen ebener Kurven und den Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabelen eine sehr innige Beziehung besteht, die sich zu erkennen giebt, indem die Integrale einer dieser Gleichungen ein System von Kurven darstellen. Die gegebene Differentialgleichung läßt jedem Punkte eine bestimmte Anzahl von ihm ausgehender Richtungen entsprechen und einer Geraden eine bestimmte Anzahl auf ihr liegender Punkte. Auf diese Beziehungen wurde Clebsch durch seine Untersuchungen über die Konnexe[40]) (vgl. § VI) und unabhängig von Fouret[41])

32) Paris, 1871.

33) *Journ. für Math.* 79, 80.

34) *Göttinger Nachr.* 1874, 75; *Math. Ann.* 13.

35) *Phil. Trans.* 1858.

36) *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1866); *Comptes rendus,* 1866; *Journ. für Math.* 66 u. s. w. Die eleganten analytischen Untersuchungen von Brill und Krey (*Math. Ann.* und *Acta math.*) haben zum Ziele die Auflösung von Problemen aus der abzählenden Geometrie, die sich auf Systeme von Kurven und Oberflächen beziehen.

37) *Annali di Matem.* II, 6; *Proc. math. Soc.* 5, 6, 8.

38) *Math. Ann.* 1, 6, 12, 15.

39) *Compt. rend.* 88. Bemerkenswert in dieser Abhandlung ist die Ausdehnung des Begriffes des Geschlechtes einer Kurve auf Systeme von Kurven.

40) *Math. Ann.* 6.

41) *Comptes rendus* 78 und 86; *Bull. Soc. math.* 2 und 7.

geführt. In ähnlicher Weise kann man eine Beziehung zwischen den Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabelen und einem Systeme von Oberflächen aufstellen, wie dies ebenfalls Fouret[42]) bemerkt hat. Dieser Zusammenhang ist von grosser Wichtigkeit, weil er gestattet, Sätze auf transcendente Kurven oder Oberflächen auszudehnen, von denen man glaubte, daß sie nur für algebraische Kurven oder Oberflächen gültig seien; so konnte Fouret den Satz über die Zahl der Kurven eines Systemes, welche eine gegebene algebraische Kurve berühren, auf Systeme von transcendenten Kurven ausdehnen,[43]) konnte ferner die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte eines einfach unendlichen Systemes von Oberflächen mit den Oberflächen eines doppelt unendlichen Systemes bestimmen,[44]) ebenso die Ordnung des Ortes der Berührungspunkte der Oberflächen eines doppelt unendlichen Systemes mit einer gegebenen algebraischen Oberfläche[45]) u. s. w.[46])

Trotz dieser und anderer Arbeiten, die ich der Kürze wegen übergehe, war die ganze Tragweite der Chaslesschen Betrachtungen noch nicht offenbar geworden; das geschah durch den letzten, von dem ich zu sprechen habe, durch Hermann Schubert in seinem *Kalkül der abzählenden Geometrie.*[47]) Dieses Buch, das noch viel zu wenig ge-

42) *Comptes rendus* 79, 86.

43) das. 82, 84.

44) das. 80.

45) das. 82.

46) Andere Anwendungen dieses Prinzipes finden sich in den von Fouret veröffentlichten Arbeiten in den *Comptes rendus* 83, 85, im *Bull. Soc. math.* 5 und im *Bulletin de la Société philomathique* VI, 11. — Wir bemerken, daß die geometrische Interpretation der Gleichung $L\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)-M\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-N\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R=0$, wenn L, M, N, R lineare Funktionen sind, welche von Fouret in den *Comptes rendus* 83 gegeben ist, ihn zu gewissen Oberflächen führte, die zuerst von Klein und Lie studiert worden waren (*Comptes rendus* 70).

47) Leipzig, 1879. In demselben sind die früheren Arbeiten von Schubert vereinigt und befinden sich die Grundlagen seiner späteren Arbeiten.

schätzt wird, kann man mit Recht als dasjenige betrachten, welches zuerst von Grund auf das Problem behandelte, „zu bestimmen, wie viele geometrische Gebilde von gegebener Definition einer hinreichenden Zahl von Bedingungen genügen," d. h. das Problem der abzählenden Geometrie. Dort sind die Korrespondenzprinzipien unter ihrem wahren Gesichtspunkte auseinandergesetzt,[48]) dort ist klar erörtert, was man unter dem Charakteristikenproblem einer bestimmten Figur zu verstehen hat, und sind Methoden von außerordentlicher Macht für dessen Lösung gezeigt. Die Schubertschen Methoden sind dazu bestimmt, eines Tages das übliche Hilfsmittel für den Mathematiker zu werden, wie es augenblicklich die Cartesische Geometrie ist, und niemand wird mich der Übertreibung beschuldigen, der bedenkt, daß dieselben in einer Unzahl von Fällen zur Lösung des allgemeinen Problemes der Elimination dienen, d. h. die Zahl der Lösungen eines Systemes von algebraischen Gleichungen zu bestimmen. Daher müssen alle, Analytiker und Geometer, dem Werke von Schubert, durch welches er die abzählende Geometrie zu einer besonderen Disziplin erhoben hat, reiches Lob zollen, oder besser, anstatt es blos zu bewundern, sich vor-

---

48) Das erste dieser Prinzipien wurde von Chasles für die rationalen Gebilde erster Stufe (*Comptes rendus* 1864—1866) ausgesprochen und dann von Cayley auf alle Gebilde erster Stufe ausgedehnt (*Comptes rendus* 62, *Proc. math. Soc.* 1866), und noch vollständiger im *Second memoir on the curves which satisfy given conditions (Phil. Trans.* 158). Bewiesen wurde das Cayleysche Prinzip von Brill (*Math. Ann.* 6 und 7), neuerdings wurde es in einer sehr bemerkenswerten Weise von Hurwitz ausgedehnt (*Math. Ann.* 28).

Saltel ergänzte das Chaslessche Korrespondenzprinzip, indem er die Bestimmung der Zahl der Koinzidenzen, die ins Unendliche fallen, zeigte (*Comptes rendus* 80) und illustrierte seine Resultate durch mehrere Beispiele (*Comptes rendus* 80, 81, 82, 83, und *Bulletin de l'Académie de Belgique* II, 92).

Für die rationalen Gebilde zweiter und dritter Stufe hat man auch ein Korrespondenzprinzip, welches von Salmon (*Geometry of three dimensions* II. Aufl.) und von Zeuthen (*Comptes rendus* 78) entdeckt ist. Für die Gebilde höherer Stufe siehe eine Note von Pieri in den *Lincei Rend.* 1887.

nehmen, die fruchtbaren Methoden desselben zu vervollkommnen und sie von Mängeln frei zu machen, d. h. sie von dem Tadel, der ihnen von einigen gemacht worden ist, daß sie nicht ganz strenge seien, zu befreien und sie selbst oder wenigstens die Anwendungen, deren sie fähig sind, zu vermehren.

Die auf die Theorie der Charakteristiken bezüglichen Andeutungen[49]) würden eine unverzeihliche Lücke darbieten, wenn sie nicht einen Hinblick auf eine wichtige Frage böten, die zwischen einigen Geometern ventiliert wurde, und die man heute als schon gelöst betrachten darf. Geleitet nämlich durch einen Induktionsschluß, behauptete Chasles, daß die Zahl derjenigen Kegelschnitte eines einfach unendlichen Systemes, welche einer neuen einfachen Bedingung genügen, ausgedrückt wird durch eine homogene lineare Funktion der Charakteristiken des Systemes, deren Koeffizienten einzig und allein von dieser Bedingung abhängen. Darboux,[50]) Clebsch,[51]) Lindemann,[52]) Hurwitz und Schubert,[53]) sowie noch andere glaubten diesen Satz beweisen zu können. Aber daß die von ihnen angeführten Gründe nicht beweiskräftig waren, wurde in einer Reihe von Arbeiten gezeigt, in welchen Halphen[54]) die Hinfälligkeit der Vermutung Chasles' klar legte und zeigte, wie man den vorher angeführten Satz modifizieren müsse. In der Theorie der Charakteristiken der Systeme von Flächen zweiten Grades hat man einen analogen Satz, den ebenfalls Halphen[55]) entdeckt hat. Jedoch glaube man nicht, daß diese Sätze

49) Betreffend andere bibliographische Einzelheiten über diesen Zweig der Geometrie vgl. man den Artikel von Painvin, der in dem *Bull. Sciences math.* 3 veröffentlicht ist, sowie einen von mir selbst in der *Bibliotheca mathematica* II, 2 (1888), S. 39, 67 veröffentlichten Artikel *Notizie storiche sulla geometria numerativa.*

50) *Comptes rendus* 67.

51) *Math. Ann.* 6.

52) *Vorlesungen über Geometrie* von A. Clebsch (herausgegeben von Lindemann) (Leipzig, 1876) S. 399.

53) *Göttinger Nachr.* 1876.

54) *Comptes rendus,* 1876; *Journ. Éc. polyt.* 45; *Proc. math. Soc.* 9, 10; *Math. Ann.* 15.

55) *Journ. Éc. polyt.* 45.

von Halphen die Resultate zerstören, welche man erhalten, indem man den Chaslesschen Weg einschlug; vielmehr sind dieselben glücklicherweise meistenteils unabhängig von dem fraglichen Theorem, und für die anderen Fälle ist es leicht zu zeigen, welche Korrektionen man machen muß.[56])

V.

Theorie der Kurven doppelter Krümmung.

Die Theorie der ebenen Kurven kann man in zwei verschiedenen Richtungen verallgemeinern. Indem man die Thatsache ins Auge faßt, daß eine solche Kurve durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten eines Punktes einer Ebene dargestellt wird, so ergiebt sich als Analogon im Raume die Theorie der Oberflächen, indem diese als durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten eines Punktes im Raume darstellbar betrachtet werden, auf welche Betrachtung wir im Vorhergehenden eingegangen sind. Wenn man hingegen eine ebene Kurve als eine Reihe von einfach unendlich vielen Punkten ansieht, so kann man die Theorie ausdehnen, indem man die Beschränkung aufhebt, daß diese in einer Ebene gelegen seien: dann entsteht die Theorie der unebenen Kurven.

Das Studium der Infinitesimaleigenschaften derselben kann man leicht genug mit Hilfe von Methoden machen, die nicht sehr verschieden sind von denjenigen, die für die

56) Auch von dem Satze, den Cremona ausgesprochen hat (*Annali di Matem.* I, 6 und *Giorn. di Matem.* 3) über die doppelt unendlichen Systeme von Kegelschnitten, als Erweiterung des Satzes von Chasles, kann man eine Anwendung machen, worüber man das einsehen möge, was del Pezzo in seiner interessanten Abhandlung *Sui sistemi di coniche* (*Napoli Rend.* 1884) auseinandergesetzt hat, und neuere Beobachtungen von Study (*Math. Ann.* 27).

ebenen Kurven angewandt werden. Deshalb wurde dasselbe, wie ich schon sagte, vor mehr als einem Jahrhundert von Clairaut unternommen und wurde hernach von Lancret (1774—1807),[1]) Monge,[2]) Tinseau,[3]) de Saint-Venant (1797—1886),[4]) von Frenet,[5]) Alfred Serret[6]) und Paul Serret, von Liouville (1809—1882),[7]) Bertrand,[8]) von Puiseux (1820—1883),[9]) von Lie[10] und vielen anderen fortgesetzt.[11])

Aber abgesehen von dieser Betrachtungsrichtung bietet das Studium der übrigen allgemeinen Eigenschaften der unebenen Kurven sehr große Schwierigkeiten. Man vermutete eine Zeit lang, daß jede Kurve im Raume als der vollständige Schnitt zweier Oberflächen angesehen werden und daher durch ein System von zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten eines Punktes im Raume dargestellt werden könnte;[12]) aber bald erkannte man die Existenz von Kurven, die nicht der vollständige Schnitt von Oberflächen sind, und die Notwendigkeit, dieselben nicht vermittelst zweier, son-

---

1) *Mém. prés.* 1, 1806.

2) das. (ältere Serie) 10, 1785, und die schon zitierte *Application.*

3) *Mém. prés.* 9, 1781.

4) *Journ. Éc. polyt.* 30.

5) *Liouvilles Journ.* 17.

6) das. 16.

7) Man sehe die Noten zur *Application de l'Analyse à la Géométrie,* 5. Aufl. und *Liouvilles Journ.* 17.

8) *Liouvilles Journ.* 15, 16.

9) das. 7.

10) *Forhandlingar i Videnskab-Selskabet i Christiania,* 1882.

11) Eingehenderes findet man in der Note 65 der *Analytischen Geometrie des Raumes* von G. Salmon, deutsch bearbeitet von W. Fiedler, 3. Aufl. 1880, II. Teil S. 37. — In Bezug auf eine synthetische Darstellung der Differentialgeometrie der Raumkurven sehe man Schell, *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung* (Leipzig, 1859), und Paul Serret, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure* (Paris, 1860).

12) Vgl. Magnus, *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes,* 1837, S. 160.

dern dreier Gleichungen darzustellen, die ebenso vielen durch dieselbe hindurchgehenden Oberflächen entsprechen. Man setzte voraus, daß die Kenntnis der Ordnung zur Einteilung der unebenen Kurven hinreichen würde, aber sobald man an die vierte Ordnung gekommen war, erkannte man, daß dieselbe nicht genüge.[13]) Man hätte nun glauben sollen, daß die Ordnung und die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte für den besagten Zweck hinreichen würden, aber als man an die neunte Ordnung herantrat, sah man, daß man sich geirrt habe.[14]) Auch eine dritte Zahl, die niedrigste Ordnung der Kegel, die durch die von einem Punkte herkommenden Sehnen (Doppelsekanten) der Kurve gehen, konnte nur bei den Kurven von niederer, als der fünfzehnten Ordnung dazu verhelfen. So kam man denn zu dem Schlusse, daß es unmöglich sei, eine gegebene Kurve vermittelst einer bestimmten Menge von vornherein angebbarer Zahlen zu charakterisieren.

Ich habe diese Thatsachen anführen wollen, um zu zeigen, daß die allgemeine Theorie der unebenen Kurven keine Ähnlichkeit mit irgend einem anderen Teile der Geometrie zeigt und, indem ich auf die erschreckliche Dunkelheit, die sie darbietet, hinwies, dem Leser das Mittel geben wollen, den Grund zu finden, warum die Kenntnisse, die wir über diese Gebilde haben, so wenig zahlreich und erst neueren Ursprunges sind.

Die ersten allgemeinen Resultate über die Kurven doppelter Krümmung verdanken wir Cayley, welcher ihnen zwei wichtige Abhandlungen gewidmet hat. In einer derselben stellte er die Formeln (analog denen von Plücker) auf, welche die Zahl der Singularitäten einer Raumkurve

---

13) Die Existenz zweier Raumkurven vierter Ordnung wurde zuerst durch Salmon im Jahre 1850 (*Cambridge Journ.* 5) und darauf von Steiner (*Journ. für Math.* 53) bekannt gemacht.

14) Auf der kubischen Fläche treten schon von der sechsten Ordnung ab gegen die Geraden der Fläche verschiedenartig sich verhaltende Kurven derselben Ordnung auf, die in der Zahl der scheinbaren Doppelpunkte übereinstimmen. Vgl. Sturm, *Math. Ann.* 21.

untereinander verbinden.[15]) In der anderen führte er für das Studium der Raumkurven von der Ordnung n diejenigen bemerkenswerten Flächen ein, welche er „Monoide" nannte.[16])

Nach diesen Arbeiten müssen wir, um einen wirklich bemerkenswerten Fortschritt in der Theorie, welche uns beschäftigt, zu finden, uns zu Halphen und Nöther wenden, deren Abhandlungen[17]), im Jahre 1882 von der Akademie zu Berlin mit dem Preise gekrönt, die Grundlage für eine allgemeine Theorie der Raumkurven sind; denn sie behandeln die Probleme: „alle voneinander verschiedenen Kurven von gegebener Ordnung zu bestimmen", „anzugeben, welche Kurven es auf einer gegebenen Oberfläche giebt" und noch viele andere von nicht geringer Bedeutung. Diese beiden Arbeiten verschlingen sich so enge und durchdringen sich so innig, daß es sehr schwer wird, zu entscheiden, welcher Anteil jedem der beiden Autoren in den vielen gemeinsamen

---

15) *Liouvilles Journ.* 10, oder *Cambridge Journ.* 5. Dieser Abhandlung folgte eine, die von Salmon in demselben Bande des *Cambr. Journ.* veröffentlicht wurde, und zu ihrer Ergänzung wiederum dient eine von Zeuthen, die in den *Annali di Matem.* II, 3 abgedruckt ist. — An sie schließen sich ferner die Schriften, welche Cayley (*Phil. Trans.* 153), Piquet (*Comptes rendus* 77 und *Bull. Soc. math.* 1), und Geiser (*Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini*, Mailand, 1881) geschrieben haben über die Geraden, welche eine Raumkurve eine gewisse Anzahl Male schneiden.

16) *Comptes rendus* 54 und 58. Mit dieser Abhandlung vergleiche man die Dissertation von Ed. Weyr, *Über algebraische Raumkurven* (Göttingen, 1873) und andere Schriften desselben Verfassers (*Comptes rendus* 76, *Wiener Ber.* 69). Den zitierten Abhandlungen von Cayley müßte ich noch eine dritte hinzufügen (*Quart. Journ.* 3), in welcher der Autor sich die Aufgabe gestellt hat, eine Kurve als Komplex ihrer Sekanten (im Sinne Plückers) zu betrachten und sie daher mittelst einer einzigen Gleichung zwischen den Koordinaten einer Geraden im Raume darzustellen, aber ich kann davon absehen, da die Fruchtbarkeit einer solchen Betrachtung noch nicht dargethan ist.

17) Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (*Journ. Éc. polyt.* 52). Man sehe auch desselben Autors Abhandlung *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* (*Bull. Soc. math.* 9). — Nöther, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (*Berliner Abh.* 1883, *Journ. für Math.* 93).

Resultaten zufällt, die sie enthalten. Wenn einerseits Nöther die Theoreme, welche Ende des Jahres 1870 von Halphen in den *Comptes rendus* und an anderen Stellen[18]) ausgesprochen sind, ausbeuten konnte, so konnte dieser sich der Sätze bedienen, welche in der sehr bedeutenden Abhandlung von Brill und Nöther, *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie*[19]) enthalten sind, und in derjenigen, in welcher Nöther streng den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen dargethan hatte, welcher in der Auseinandersetzung von Halphen unumgänglich notwendig war.[20]) Und man glaube nicht, daß die von den beiden Geometern bei ihrem Thema eingeschlagenen Wege im wesentlichen verschieden gewesen seien, vielmehr benutzten sie beide (wie Cayley geraten hatte) Monoide, und wenn der eine vorzugsweise Formeln und Sätze aus der Theorie der Abelschen Integrale gebraucht, so wendet der andere solche Lehrsätze über die algebraischen Funktionen an, welche zu denselben Eigenschaften führen. Jedenfalls steht es außer Zweifel, daß diese beiden hervorragenden Produktionen unseres Zeitalters bestimmt sind, die Grundlage für die zukünftigen geometrischen Untersuchungen zu bilden, und wenn bis jetzt sich ihr Einfluß noch nicht so allgemein geltend gemacht hat, so ist dieses vorzugsweise den großen Schwierigkeiten zuzuschreiben, die ihr Gegenstand noch immer darbietet, und vielleicht auch den Lücken, die in den Methoden vorhanden sind, die man zu Hilfe nehmen könnte, um jene zu überwinden.[21])

---

18) *Comptes rendus* 70; *Bull. Soc. math.* 1 und 2.

19) *Math. Ann.* 7.

20) *Math. Ann.* 6. Ein anderer Beweis desselben Satzes wurde von Halphen gegeben, *Bull. Soc. math.* 5.

21) Die Gerechtigkeit verlangt, daß ich auch noch eine sehr schöne Arbeit von Valentiner anführe: *Bidrag til Rumcurvener Theori* (Kopenhagen, 1881) (vgl. auch *Tidsskrift for Math.* IV, 5 und *Acta math.* 2), die fast zu gleicher Zeit mit denen von Halphen und Nöther erschienen ist und mit diesen in den Methoden und den Resultaten bemerkenswerte Berührungspunkte hat. — Ich will in dieser Note auch noch, da ich es im Texte nicht thun konnte, einen Satz

Aber vor der Begründung der allgemeinen Theorie wurden viele einzelne Kurven einem genaueren Studium unterworfen; da ich aber wünsche, mehr als getreuer, denn als glänzender Geschichtsschreiber angesehen zu werden, so muß ich hier eine Aufzählung der Arbeiten unternehmen, in welchen die hervorragenderen unter diesen Untersuchungen enthalten sind.

„Degli altri fia laudabile il tacerci,
Chè il tempo saria corto a tanto suono." [22])

Unter ihnen verdienen den ersten Platz diejenigen, welche die kubischen Raumkurven behandeln. Über diese haben Möbius[23]) und Chasles[24]) verschiedene sehr schöne Eigenschaften aufgefunden; dieselben vermehrten sich mit solcher Schnelligkeit, daß Staudt[25]) binnen kurzem die vollständige Analogie, die zwischen ihnen und den Kegelschnitten besteht, feststellen konnte; diese Analogie hat sich von Tag zu Tag mehr vervollkommnet, dank den Studien von Seydewitz,[26]) Joachimsthal[27]) Cremona,[28])

---

von Cremona anführen (von Dino in den *Napoli Rend.* 1879 bewiesen) und einige von Sturm (*Report of the British Association*, 1881; *Math. Ann.* 19), welche bemerkenswerte allgemeine Eigenschaften der Raumkurven ausdrücken, sowie an die Untersuchungen von Cayley, Piquet und Geiser über eine Raumkurve mehrmals schneidende Geraden erinnern, von denen in der Note 15 gesprochen wurde. Erwähnenswert ist auch die (von Hoßfeld in der *Zeitschr. f. Math.* 29 gefundene) Thatsache, daß die Rückkehrkurve der zweien Oberflächen umbeschriebenen abwickelbaren Fläche nicht der vollständige Schnitt zweier Oberflächen ist.

22) „Von anderen wird es löblich sein zu schweigen,
Weil allzukurz die Zeit für die Erzählung."
Dantes Göttliche Komödie; *Die Hölle*, 15. Gesang, Vers 104 – 105.

23) *Der barycentrische Calcül* (Leipzig, 1827).

24) *Aperçu historique*, Note 33; *Liouvilles Journ.* 19 (1854).

25) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3. Heft (Nürnberg, 1860).

26) *Grunerts Arch.* 10.

27) *Journ. für Math.* 56.

28) *Journ. für Math.* 58, 60, 63; *Nouv. Ann.* II, 1; *Annali di Matem.* I, 1, 2, 5; *Lombardo Rend.* II, 12.

Schröter,[29]) Reye,[30]) Emil Weyr,[31]) Sturm,[32]) Hurwitz,[33]) welche nicht allein die Aufstellung einer vollständigen synthetischen Behandlung dieser Kurven gestatten, sondern auch das Terrain für die so elegante analytische Auseinandersetzung ebneten, die mein innigst geliebter Lehrer E. d'Ovidio[34]) und Pitarelli[35]) gemacht haben.

Dann will ich die Theorie der unebenen, auf einem einschaligen Hyperboloide gezeichneten Kurven anführen, für welche Chasles[36]) das Fundament gelegt hat, und die von unserem Cremona[37]) so sehr bereichert ist. Ferner will

---

29) *Journ. für Math.* 56; *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1880); *Math. Ann.* 25. Vgl. auch eine Note von mir in den *Napoli Rend.*, 1885.

30) *Zeitschr. für Math.*, 1868; *Geometrie der Lage.*

31) *Lombardo Rend.* 1871.

32) *Journ. für Math.* 79, 80; *Annali di Matem.* II, 3.

33) *Math. Ann.* 20 und 30.

34) *Torino Mem.* II, 32 und *Collectanea mathematica.* An diese Abhandlungen schließt sich eine von Gerbaldi, *Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di III. classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate projettivamente* (*Torino Mem.* II, 32).

35) *Giorn. di Matem.* 17 (1879). Betreffend die ausgearteten Formen der kubischen Raumkurve sehe man eine Note von Schubert (*Math. Ann.* 15). Die Theorie der kubischen Raumkurven führt zu einer interessanten geometrischen Darstellung der Theorie der binären algebraischen Formen, die von Laguerre (*L'Institut* 40), von Sturm (*Journ. f. Math.* 86) und von Appell (*Ann. Éc. norm.* II, 5) bearbeitet wurde. Vgl. auch eine Note von J. Tannery (*Bull. sciences math.* 11). Ferner sehe man in bezug hierauf die Note von W. R. W. Roberts (*Proc. math. Soc.* 13) und das Buch von Franz Meyer, *Apolarität und rationale Kurven* (Tübingen, 1883). Eine gute Darlegung der Theorie der Raumkurven dritter Ordnung hat auch von Drach geliefert in der Schrift *Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte* (Leipzig, 1867), infolge deren Beltrami interessante *Annotazioni* geschrieben hat (*Lombardo Rend.* II, 1).

36) *Comptes rendus* 53 (1861).

37) *Annali di matem.* 4. — Die Note von Story, *On the number of intersections of curves traced on a scroll of any order* (*Johns Hopkins Baltimore University Circulars* 2, 1883) enthält eine Verallgemeinerung eines sehr wichtigen Theoremes von Chasles.

ich der vielen Eigenschaften erwähnen, welche Poncelet,[38]) Chasles,[39]) Cremona,[40]) Reye,[41]) Paul Serret,[42]) Laguerre,[43]) Milinowski[44]) und viele andere über die Raumkurven vierter Ordnung erster Art gefunden haben, und die schönen Anwendungen, die sie für die Theorie der zweifach periodischen Funktionen geliefert haben, — Harnack,[45]) Lange,[46]) Westphal,[47]) Léauté[48]) u. s. w. Auch kann ich die schönen Arbeiten von Cremona,[49]) von Armenante,[50]) Bertini[51]) und Em. Weyr[52]) über die Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art nicht stillschweigend übergehen, ferner nicht die von Klein und Lie über die durch unendlich viele lineare Transformationen in sich selbst transformierten

---

38) Poncelet machte im Jahre 1822 die bemerkenswerte Entdeckung, daß durch jede Raumkurve vierter Ordnung erster Art vier Kegel zweiten Grades hindurchgehen. (S. *Traité des proprietés projectives* I, S. 385, 2. Aufl.)

39) *Comptes rendus* 54, 55.

40) *Comptes rendus* 54; *Bologna Mem.* 1861; *Lombardo Rend.* II, 1.

41) *Annali di Matem.* II, 2.

42) *Géometrie de direction* (Paris, 1869); *Comptes rendus* 82.

43) *Liouvilles Journ.* II, 15.

44) *Journ. für Math.* 97. — Eine bemerkenswerte spezielle Raumkurve vierter Ordnung erster Art hat Schröter untersucht: *Journ. für Math.* 93.

45) *Math. Ann.* 12, 13.

46) *Zeitschr. f. Math.* 28.

47) *Math. Ann.* 13. Vgl. Cayley (das. 25).

48) *Comptes rendus* 82.

49) *Annali di Matem.* I, 4.

50) *Giorn. di Matem.* 11, 12.

51) *Lombardo Rend.* 1872.

52) *Wiener Ber.* 1871. Über die rationalen Kurven vierter Ordnung sehe man auch Study (*Leipziger Sitzungsber.* 1886), die *Habilitationsschrift* von Jolles (Aachen, 1886) und die Abhandlung von Roberts (*Proc. math. Soc.* 14). — Unter den rationalen Kurven vierter Ordnung ist eine sehr bemerkenswerte diejenige, welche zwei stationäre Tangenten hat. Die eleganten Eigenschaften, welche dieselbe besitzt, wurden von Cremona (*Lombardo Rend.* 1868), Em. Weyr (das. 1871) und Appell (*Comptes rendus* 83) entdeckt.

Kurven,[53]) noch auch die von Fiedler[54]) angestellte Bestimmung der Kurven von nicht höherer als neunter Ordnung, die zu ihren eigenen Tangenten-Developpabelen dual sind. Und wie könnte ich es unterlassen, einen Blick auf die große Zahl von Kurven zu werfen, welche Cremona und Sturm[55]) studiert haben, indem sie sich mit der Geometrie auf einer Oberfläche dritter Ordnung beschäftigten, dann auf die wichtigen Probleme, die von Clebsch und seinen Schülern über die rationalen,[56]) elliptischen und hyperelliptischen[57]) Kurven gelöst sind, und die eleganten Eigenschaften, welche Bertini[58]) an den rationalen Kurven fünfter Ordnung auffand, sowie W. Stahl[59]) bei denjenigen, deren Punkte auf einer Oberfläche zweiten Grades liegen, während die Oskulationsebenen eine solche zweiter Klasse berühren?

Indem der unerfahrene Leser so bedeutende und so verschiedene Untersuchungen aufzählen hört, wird er sich von einem gewissen Kleinmute bedrängt fühlen und sich fragen, wie es in kurzer Zeit möglich sei, dieselben, wenn auch nicht alle, so doch größtenteils sich anzueignen? Man beruhige sich. Die Übersicht ist für den Studierenden viel weniger schwierig, als es nach meiner Besprechung scheinen könnte. Die von den Geometern der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts aufgestellten Prinzipien sind so fruchtbar, daß, wenn jemand sich dieselben gründlich zu eigen gemacht hat, er nicht allein selbst viele weitere Untersuchungen ableiten, sondern auch noch darnach streben kann, die Wissenschaft selbst weiter zu fördern. Und dieses — was sicherlich ein

---

53) *Comptes rendus* 70.

54) *Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich* 20.

55) Außer den zitierten *Synthetischen Untersuchungen* sehe man *Journ. für Math.* 88 und *Math. Ann.* 21.

56) S. Korndörfer und Brill, *Math. Ann.* 3; Saltel, *Comptes rendus* 80; Genty, *Bull. Soc. math.* 9.

57) Siehe unter anderem die Bemerkung von Buchheim, *On the extension of certain theories relating to plane cubics to curves of any deficiency* (*Proc. math. Soc.* 13).

58) *Collectanea mathematica.*

59) *Journ. für Math.* 99.

nicht zu unterschätzender Vorzug der heutigen Wissenschaft vor der unserer Väter ist — wurde in Kürze von einem ihrer Gründer mit den fortan klassischen Worten ausgesprochen: „*Peut donc qui voudra dans l'état actuel de la science généraliser et créer en géométrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice*“,[60]) goldene Worte, welche jeder, der Mathematik betreiben will, sich einprägen muß; indem sie ihn auf einen wahrscheinlichen Sieg hoffen lassen, werden sie ihn anspornen, sich mutig den geistigen Kämpfen entgegenzustellen, die ihn erwarten.

VI.

Abbildungen, Korrespondenzen, Transformationen.

Bei dieser flüchtigen Musterung der neuesten geometrischen Entdeckungen gelangen wir nun zur Lehre von den Abbildungen, Korrespondenzen und Transformationen. — Es ist bekannt, daß zwischen zwei ebenen Punktfeldern eine Korrespondenz (Verwandtschaft) besteht, wenn jedem Punkte des einen eine Gruppe von Punkten des anderen zugeordnet ist; diese heißen dann die „entsprechenden“ zu jenem. Wenn im speziellen Falle jeder Punkt des einen Feldes einen einzigen entsprechenden in dem anderen hat, so heißt die Korrespondenz „eindeutig“.

Die einfacheren Fälle der eindeutigen Korrespondenz sind die Homologie — von Poncelet studiert (1822) — und die Kollineation (Homographie), von Möbius (1827), Magnus (1833) und Chasles (1837) studiert. In diesen Fällen entspricht nicht nur jedem Punkte ein Punkt, sondern

60) Chasles, *Aperçu historique*, 2. Aufl., S. 269; in der deutschen Übersetzung von Sohncke, S. 267.

auch jeder Geraden eine Gerade. — Ein Beispiel einer komplizierteren Korrespondenz wurde von Steiner (1832) durch folgende Konstruktion erhalten:[1]) Gegeben sind zwei getrennte Ebenen und zwei windschiefe Geraden; durch jeden Punkt der einen von jenen ziehe man die Gerade, welche die beiden gegebenen Geraden schneidet, und bestimme den Schnittpunkt mit der anderen Ebene. Indem man diesen Schnittpunkt dem in der ersten Ebene gewählten Punkte zuordnet, erhält man eine eindeutige Beziehung von der Art, daß jeder Geraden in der einen Ebene ein Kegelschnitt in der anderen entspricht. Läßt man nun die beiden Ebenen zusammenfallen, so erhält man eine Korrespondenz, welche im wesentlichen nicht von der durch Poncelet[2]) zwischen in bezug auf ein Kegelschnittbüschel konjugierten Punkten gefundenen verschieden ist, und welche auf analytischem Wege von Plücker[3]) untersucht wurde, sodann von Magnus (1790—1861)[4]) und von unserem Schiaparelli,[5]) synthetisch aber von Seydewitz[6]) und später von Reye.[7]) — Auf ein drittes Beispiel führte die Lösung einiger Probleme aus der mathematischen Physik; man gelangt dazu auf folgende Weise: Gegeben sei in einer Ebene ein fester Punkt, man associiert zwei mit ihm in gerader Linie gelegene Punkte, deren Abstände von ihm umgekehrt proportional sind. Man erhält dann eine eindeutige Korrespondenz, welche jede Gerade in einen Kreis, und jeden Kreis wieder in einen Kreis verwandelt. Diese wurde von Sir William

---

1) Diese Konstruktion, die von den Deutschen „Steinersche Projektion" genannt wird, wurde im Jahre 1865 von neuem von Transon (1805—1876) gefunden, der ihr den Namen *„projection gauche"* gab (*Nouv. Ann.* II, 4 und 5).

2) *Traité des propriétés projectives* (1. Aufl. 1822, S. 198).

3) *Journ. für Math.* 5.

4) *Journ. für Math.* 8, und *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene*, 1833.

5) *Torino Mem.* 1862.

6) *Grunerts Arch.* 7.

7) *Zeitschr. f. Math.* 11.

Thomson[8]) als „Prinzip der elektrischen Bilder“ studiert und ist unter dem Namen „Transformation durch reciproke Radien“ oder „Inversion“ allgemein bekannt.[9])

Alle diese Transformationen sind linear oder quadratisch, da sie eine Gerade in eine Kurve erster oder zweiter Ordnung verwandeln. Jedoch machte Magnus schon die Bemerkung, daß, wenn man eine quadratische Transformation wiederholt, man im allgemeinen eine solche höherer Ordnung erhält.[10]) Diese wichtige Bemerkung blieb aber bis zu dem Zeitpunkte unfruchtbar (1863), in welchem Cremona von den wenigen bisher erörterten Fällen zur allgemeinen Theorie der geometrischen Transformationen der ebenen Figuren überging.[11])

---

8) *Liouvilles Journ.* 10, 12. Vorher hatten schon G. Bellavitis (*Nuovi Saggi dell' Accademia di Padova* 4 (1836) und Stubbs (*Phil. Mag.* 23, 1843) sich mit dieser Korrespondenz beschäftigt. Man sehe auch Steiners Aufsatz aus dem Jahre 1826: *Einige geometrische Betrachtungen* (*Journ. für Math.* 1; *Gesammelte Werke* Bd. I, S. 19) Nr. 20.

9) Auf den Begriff der Inversion ist von Johnson (*Analyst* 4) eine neue Einteilung der ebenen Kurven gegründet worden. In derselben bedeutet der Name „Kreisgrad“ einer Kurve den Grad ihrer Gleichung (in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten) in x, y, $r = x^2 + y^2$; der Kreisgrad einer Kurve wird durch die Inversion nicht verändert. Zwei Kurven, welche denselben Grad haben, gehören zu derselben Kategorie. Diese Einteilung scheint jedoch nicht von großer Wichtigkeit zu sein.

10) *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene*, 1833.

11) In den Jahren 1859 und 1860 studierte Jonquières die (nach seinem Namen benannte) Transformation n^{ter} Ordnung, bei welcher jeder Geraden eine Kurve n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkte entspricht. Einige seiner Resultate wurden im Jahre 1864 in den *Nouv. Ann.* veröffentlicht, aber das vollständige Werk, welches er dieser Transformation widmete, erschien erst 1885 und zwar durch Guccia (s. *Giorn. di Matem.* 23) herausgegeben. Wir bemerken auch, daß schon 1834 Möbius (*Journ. für Math.* 12; *Gesammelte Werke*, 1) die eindeutige Korrespondenz zwischen zwei Ebenen, bei denen die Flächeninhalte entsprechender Figuren in einem konstanten Verhältnisse stehen, studiert hat. Die Untersuchungen sind jedoch von ganz anderer Art als die im Texte betrachteten.

Um dem Leser die Bedeutung der Schriften, welche Cremona dieser Theorie[12]) gewidmet hat, zu zeigen, würde ich auseinanderzusetzen haben, auf welche Weise dieser große Geometer das Studium der eindeutigen Transformationen auf das eines homaloidischen Netzes von Kurven zurückgeführt hat, und die Bestimmung eines solchen Netzes auf die Lösung eines unbestimmten Systemes von linearen Gleichungen; aber da die Anlage meiner Abhandlung mir das nicht gestattet, so muß ich mich darauf beschränken, ihn davon durch den alten Beweis des „*consensus omnium*" zu überzeugen. Dann führe ich noch die Namen von Geometern an wie Cayley,[13]) Clebsch,[14]) Nöther,[15]) Rosanes,[16]) S. Roberts,[17]) die sich bemüht haben, die (bei der ersten Behandlung des Stoffes unvermeidlichen) Lücken, die sich in den Cremonaschen Abhandlungen[18]) fanden, auszufüllen; ferner die Arbeiten von Ruffini,[19]) Jonquières,[20]) Kantor,[21]) Guccia,[22]) Autonne,[23]) welche mit dieser Lehre

12) *Bologna Mem.* 2, 5 (1863 und 1865); *Giorn. di Matem.* 1 und 3; vgl. auch Dewulfs Bearbeitung im *Bull. sciences math.* 5.

13) *Proc. math. Soc.* 3.

14) *Math. Ann.* 4.

15) *Math. Ann.* 3, 5.

16) *Journ. für Math.* 73.

17) *Proc. math. Soc.* 4.

18) Hier will ich einen wichtigen Lehrsatz berühren, der gleichzeitig von Clifford (*Proc. math. Soc.* 3), Nöther (*Göttinger Nachr.* 1870; *Math. Ann.* 3) und Rosanes (*Journ. für Math.* 73) erhalten wurde, und für einen Augenblick die Wichtigkeit der Cremonaschen Transformation aufzuheben schien: „Jede eindeutige Transformation von höherer als erster Ordnung kann man durch Wiederholung von quadratischen Transformationen erhalten." Dieser Satz ist offenbar die Umkehrung desjenigen von Magnus, der vorhin im Texte angeführt wurde.

19) *Bologna Mem.* 1877—1878.

20) *Comptes rendus,* 1885; *Giorn. di Matem.* 24.

21) *Annali di Matem.* II, 10.

22) *Comptes rendus,* 1885; *Rendic. del Circolo Matematico di Palermo* 1.

23) Man sehe die in den *Comptes rendus,* 1883, 1884, 1885, 1886 und in *Liouvilles Journ.* 1885, 1886, 1887 veröffentlichten Abhandlungen.

eng zusammenhängende Fragen behandeln, endlich die von Hirst,[24]) T. Cotterill[25]) (1808—1881), von Sturm,[26]) Schoute[27]) und sehr vielen anderen, welche sich das bescheidenere Ziel gesetzt haben, die Verbreitung derselben durch geeignete Beispiele und elegante Formeln zu erleichtern.[28])

Unter den Arbeiten, welche sich an die von Cremona anschließen, verdienen eine hervorragende Stelle diejenigen von Bertini,[29]) welche er den ebenen involutorischen Transformationen gewidmet hat, welche Arbeiten noch größere Einfachheit und Eleganz erhielten durch den Begriff der Klasse und andere Begriffe, die von Caporali[30]) (1855—1886) eingeführt wurden, jenem ausgezeichneten Geometer, dessen frühen Verlust ganz Italien betrauert.[31])

---

24) *Annali di Matem.* 7, ferner *Giorn. di Matem.* 4.

25) *Proc. math. Soc.* 2.

26) *Math. Ann.* 26.

27) *Bull. sciences math.* II, 6 und 7.

28) Meistenteils wurden die geometrischen Transformationen auf das Studium der algebraischen Kurven angewandt; jedoch fehlt es nicht an Schriften, welche sich mit der Transformation transcendenter Kurven in andere oder in sich selbst befassen: z. B. Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene*, 1833, S. 320, 455, 457—459, 497; Klein und Lie, *Math. Ann.* 4.

29) *Annali di Matem.* II, 8; *Lombardo Rend.* 1883. Vgl. auch Geiser, *Journ. für Math.* 67.

30) *Napoli Rend.*, 1879.

31) Die neueste Form, welche die Bertinischen Untersuchungen infolge dessen angenommen, machte es meinem Freunde Martinetti leichter, auf dem von diesem Gelehrten vorgezeichneten Wege weiter zu schreiten und die ebenen involutorischen Transformationen dritter und vierter Klasse zu bestimmen (*Annali di Matem.* II, 12, 13). Die Theorie der ebenen Transformationen wird sich binnen kurzem durch die wichtige Arbeit von Kantor bereichern, welche von der Akademie zu Neapel gekrönt worden ist und jetzt gedruckt wird. Einzelne Resultate finden sich in den *Wiener Ber.* 1880 ausgesprochen, sowie in den *Wiener Denkschriften* 46.

Saltel verdanken wir die Idee einer speziellen involutorischen Transformation dritten Grades, die er schon 1872 unter dem Namen *„Transformation arguesienne"* nach Desargues benannt (s. die

Von ganz verschiedenem Charakter sind hingegen die eleganten Untersuchungen von Laguerre über solche Transformationen, welche er „Transformationen durch reciproke Richtungen“ nannte; da es nicht möglich ist, den Grundgedanken in wenigen Worten zusammenzufassen und die vielfachen Anwendungen, welche der Erfinder davon gemacht hat, anzudeuten, verweisen wir den Leser auf die Originalarbeiten des hervorragenden französischen Geometers.[32])

Von der Theorie, die wir jetzt besprechen, bildet auch die Lehre von den „isogonalen Transformationen“ einen Teil, welcher sich auf die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen stützt und deren Nützlichkeit (welche vielleicht grösser

---

Mémoires de l'Académie de Belgique 12, *Bulletin de l'Académie de Belgique* II, 24), studiert hat. Man stellt dieselbe auf folgende Weise her: Gegeben sind in einer festen Ebene Π zwei Kegelschnitte Γ_1 und Γ_2 und ein fester Punkt O; man läßt entsprechen einem Punkte P von Π seinen konjugierten in der Involution, die auf der Geraden OP bestimmt wird durch den Kegelschnittbüschel, den Γ_1 und Γ_2 konstituieren. Es sind fundamental der Punkt O und die Grundpunkte dieses Büschels. — Wenn jene beiden Kegelschnitte Γ_1 und Γ_2 zusammenfallen, so reduziert sich diese Transformation offenbar auf die quadratische Inversion von Hirst. — Im Raume hat man eine ähnliche Transformation. — Eine andere Transformation *(„transformation hyperarguesienne)* wurde von demselben Verfasser als Erweiterung der vorhergehenden eingeführt (*Bulletin de l'Académie de Belgique* II, 12) und wird auf folgende Weise hergestellt: Gegeben in einer Ebene Π drei Kegelschnitte Γ_1, Γ_2, Γ_3 und ein fester Punkt O. Man läßt einem Punkte P von Π seinen homologen entsprechen in der Projektivität, die bestimmt ist auf OP von den drei Paaren von Punkten, in welchen diese Gerade von den drei Kegelschnitten getroffen wird; jedoch ist diese Korrespondenz offenbar nicht birational. — Die erste der Saltelschen Transformationen kann zur Lösung von Problemen aus der Theorie der Charakteristiken für die Kurven höherer als zweiter Ordnung dienen (*Bull. Soc. Math.* 2).

32) *Bull. Soc. math.* 8; *Comptes rendus* 94; *Nouv. Ann.* III, 1, 2. Diese Transformation kann man, wie Laguerre selbst bemerkte, auf den Raum ausdehnen (*Comptes rendus* 92), jedoch ist die Art der Korrespondenz, die man erhält, keine neue; sie ist nach einer Bemerkung von Stephanos (*Comptes rendus* 92) dieselbe, vermittelst derer Lie die Geometrie der Geraden mit der der Kugel verknüpfte (*Math. Ann.* 5).

ist für die mathematische Physik als für die reine Geometrie) Möbius,[33]) Siebeck,[34]) Durège,[35]) Beltrami,[36]) Vonder-Mühll,[37]) F. Lucas,[38]) Wedekind[39]) und neuerdings Holzmüller[40]) dargethan haben.[41])

---

33) Die verschiedenen Abhandlungen von Möbius über diese Theorie finden sich vereint im II. Bande seiner *Gesammelten Werke* (Leipzig, 1886).

34) *Journ. für Math.* 55, 57, 59; *Grunerts Arch.* 33.

35) *Grunerts Arch.* 42.

36) *Bologna Mem.* 1870.

37) *Journ. für Math.* 69.

38) Des Näheren siehe die Abhandlung: *Géometrie des polynomes* (*Journ. Éc. polyt.* 28).

39) *Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen* (Erlangen, 1875); vgl. *Math. Ann.* 9; *Studien im binären Wertgebiete* (Karlsruhe, 1876); *Math. Ann.* 17; *Erlanger Berichte,* 1875.

40) Siehe das Werk: *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1883).

41) Zwischen drei geometrischen Gebilden kann man eine Korrespondenz aufstellen, so daß einem Paare von Elementen, das eine genommen in dem einen, das andere in einem zweiten, eindeutig ein solches im dritten Gebilde entspricht. Wenn unter Festhaltung eines Elementes die anderen beiden projektive Systeme beschreiben, so nennt man die Korrespondenz trilinear, und diese wurde im Falle der Gebilde erster Stufe von Rosanes (*Journ. für Math.* 1888) behandelt, sodann von Schubert (*Math. Ann.* 17 und *Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg,* 1881) und in einem Spezialfalle von Benno Klein (*Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde,* Marburg, 1881); im Falle der Gebilde zweiter Stufe von Hauck (*Journ. für Math.* 90, 97, 98), welcher einige Anwendungen derselben auf die darstellende Geometrie machte, die von bemerkenswertem praktischen Nutzen zu sein scheinen.

Fast gleichzeitig mit den Arbeiten von Schubert sind diejenigen, in denen Le Paige mit Hilfe der Theorie der algebraischen Formen die trilineare Korrespondenz untersuchte und auf die Geometrie anwandte; man sehe die *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre* (*Mém. de la Soc. des sciences de Liège* II, 10) und die Noten, welche im *Bulletin de l'Académie de Belgique* III, 5 und in den *Wiener Ber.* 1883 veröffentlicht sind. Derselbe Geometer beschäftigte sich auch mit der quadrilinearen Beziehung (*Torino Atti* 17, 1882) und machte von ihr Anwendung auf die kubischen Flächen und gewisse Flächen

Den Begriff der eindeutigen Korrespondenz zwischen zwei Ebenen kann man auf verschiedene Weise verallgemeinern; die Weisen, die sich so ziemlich von selbst darbieten, sind folgende:

Vor allem, ohne die Ebene zu verlassen, kann man eine Korrespondenz aufstellen zwischen jedem Punkte derselben und einer Kurve eines doppelt unendlichen Systemes in derselben oder auch einer anderen Ebene;[42]) diese Art der Korrespondenz ist eine Erweiterung der Korrelation (Reciprocität) zwischen zwei Feldern; angegeben von Plücker, wurde dieselbe von Clebsch[43]) entwickelt und veranlaßte die Theorie der Konnexe.[44])

---

vierter Ordnung (*Bulletin de l'Académie de Belgique* III, 4; *Acta math.* 5).

Wir unterlassen nicht, zu erwähnen, daß die duploprojektive Beziehung, durch welche schon 1862 F. August die kubische Oberfläche erzeugte (*Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis, Berliner Dissertation*), eine trilineare Beziehung ist.

42) Wenn z. B. ein Dreieck ABC gegeben ist, so sei P ein beliebiger Punkt seiner Ebene. Es giebt nun einen Kegelschnitt K, welcher die Seiten des Dreieckes in den Punkten (PA, BC), (PB, CA), (PC, AB) berührt. Läßt man K dem P entsprechen, so hat man eine Korrespondenz von der im Texte angegebenen Art. Ähnlich erhält man eine duale Korrespondenz. Beide wurden von Montag in seiner Dissertation: *Über ein durch die Sätze von Pascal und Brianchon vermitteltes geometrisches Beziehungssystem* (Breslau, 1871) studiert. Weitere analoge Korrespondenzen kann man aus der Beobachtung entnehmen, daß jeder Punkt der Ebene ABC der Mittelpunkt eines Kegelschnittes ist, der dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist, eines ihm umgeschriebenen und eines solchen, für welchen ABC ein Polardreieck ist. Ähnlich: Gegeben ein Tetraeder $ABCD$; man kann jedem Punkte P des Raumes die Fläche zweiter Ordnung zuordnen, für welche P das Zentrum ist und in bezug auf welche $ABCD$ ein Polartetraeder ist.

43) *Math. Ann.* 6.

44) Man sehe außerdem die Arbeiten von Godt (*Göttinger Dissertation*, 1873), Armenante (*Lincei Atti*, 1875), Battaglini (*Giorn. di Matem.* 19, 20), Peano (*Torino Atti* 16) und von Amodeo (*Napoli Rend.* 1887). Die den Konnexen analogen Figuren im Raume wurden von Krause behandelt (*Math. Ann.* 14). Man sehe auch zwei Noten von Lazzeri, *Sulle reciprocità birazionali nel piano e nello spazio* (*Lincei Rend.* 1886).

Wenn man dann zum Raume übergeht, kann man eine Korrespondenz zwischen den Punkten zweier Oberflächen aufstellen (insbesondere zwischen den Punkten einer krummen Oberfläche und denen einer Ebene) oder zwischen den Punkten zweier Räume.

Die Darstellung einer Oberfläche auf einer Ebene kann man bis ins Altertum zurückverfolgen, da schon Hipparch und Ptolomaeus (und wahrscheinlich andere vor ihnen) sich die Aufgabe der Herstellung geographischer Karten gestellt und Lösungen derselben mitgeteilt haben, die auf derjenigen Projektion beruhen, welche man heute die stereographische nennt. — Die Projektion von Mercator (1512—1594), die Untersuchungen von Lambert (1728—1777) und Lagrange, die berühmte Antwort von Gauß auf eine von der dänischen Akademie gestellte Frage[45]) zeigen, wie die täglichen Bedürfnisse der Geographie und Navigationskunde unaufhörlich die Gelehrten angetrieben haben, sich mit dem Probleme der eindeutigen Darstellung der Oberfläche unseres Planeten auf einer Ebene zu beschäftigen.[46]) — Die erste Abbildung einer Oberfläche auf einer anderen jedoch, die nur in der Absicht gemacht wurde, um eine derselben leichter studieren zu können, verdanken wir Gauß, der 1827 in seinen berühmten *Disquisitions generales circa superficies curvas* es als sehr vorteilhaft erkannte, die Punkte

45) *Gauss' Werke*, 4. Bd. Eine italienische Übersetzung wurde von Beltrami in den *Annali di Matem.* 4 veröffentlicht.

46) Die Methoden, die geographischen Karten zu konstruieren, gehören in die Anwendungen der Geometrie und befinden sich deshalb nicht unter denjenigen, deren Geschichte wir hier verzeichnen wollen. Wir verweisen daher den, der alle diejenigen kennen lernen will, welche angewandt worden sind, auf die Schriften von Fiorini, *Le projezioni delle carte geografiche* (Bologna, 1881) und Zöppritz, *Leitfaden der Kartenentwurfslehre* (Leipzig, 1884). Eine Ausnahme will ich nur machen mit den Arbeiten von Tissot (*Comptes rendus* 49; vgl. auch Dini, *Memoria sopra alcuni punti della teoria delle superficie* [Florenz, 1868]; *Journ. Éc. polyt.* 37; *Nouv. Ann.* II, 17 figg.), weil sie ein großes Interesse auch vom Standpunkte der reinen Wissenschaft haben.

einer beliebigen Oberfläche den Punkten einer Kugelfläche entsprechen zu lassen, indem man zwei solche Punkte zuordnet, deren Normalen einander parallel sind.[47]) Eine besondere Eigentümlichkeit dieser Korrespondenz ist die, daß, um Eindeutigkeit zu erhalten, es fast immer nötig ist, nur den Teil der Oberfläche abzubilden, den man gerade ins Auge faßt; wir wollten diese Eigenschaft nicht stillschweigend übergehen, da deren Anführung uns Gelegenheit giebt, den Unterschied hervorzuheben, der zwischen der sphärischen Abbildung und den Abbildungen besteht, welche von Plücker,[48]) Chasles[49]) und Cayley[50]) für das Studium der Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades, denen, die von Clebsch[51]) und Cremona[52]) für das Studium der Geometrie auf einer kubischen Fläche, und von denen endlich, die von späteren Geometern für die Untersuchung anderer Flächen vorgeschlagen sind.

Die erste Arbeit, welche *ex professo* die Theorie der Abbildungen dieser Art behandelt, verdankt man Clebsch.[53]) Die zahlreichen Beispiele, durch welche der Verfasser in dieser Arbeit, sowie in einigen älteren und späteren[54]) die allgemeine Theorie illustrierte, haben zur Aufstellung der Geometrie auf einer grossen Zahl von Flächen mit vielen Einzelheiten geführt. Ferner haben die fast gleichzeitigen Abhandlungen

---

47) Diese Abbildung, die man heute die „sphärische" nennt, wurde vor Gauß von O. Rodrigues im Jahre 1815 angegeben; jedoch hat dieser ihre ganze Fruchtbarkeit nicht so in das Licht gestellt als der große deutsche Geometer.

48) *Journ. für Math.* 34.

49) *Comptes rendus*, 53.

50) *Phil. Mag.* 1861.

51) *Journ. für Math.* 68, oder *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin, 1870), III. T.

52) *Journ. für Math.* 65.

53) *Math. Ann.* 1.

54) S. *Journ. für Math.*, *Math. Ann.* und *Göttinger Nachr.* und *Abh.*

von Cremona[55]) und Nöther,[56]) sowie die ihnen folgenden von Armenante,[57]) Klein,[58]) Korndörfer,[59]) Caporali[60]) und von noch anderen[61]) im Verlaufe weniger Jahre diese Zahl außerordentlich vermehrt.[62]) Man kann sich eine ziemlich genaue Vorstellung von dem Reichtum dieses Zweiges der Geometrie machen, wenn man die schöne Abhandlung von Caporali über die dreifach unendlichen linearen Systeme ebener Kurven liest,[63]) in welcher er einerseits die Theorie der Abbildung einer Oberfläche auf eine Ebene auf das Studium solcher Systeme anwandte, andererseits in derselben wertvolle Hilfsmittel der Untersuchung fand.

Bei dem Studium der Abbildung einer Oberfläche bietet sich von selbst eine wichtige Frage dar, nämlich die, ob sie alle eindeutig auf eine Ebene abbildbar sind, oder allgemeiner: ob zwei Oberflächen sich als Punkt für Punkt

---

55) *Math. Ann.* 4; *Annali di Matem.* II, 1; *Göttinger Nachr.* 1871 und viele andere Abhandlungen, welche in den *Lombardo Rend.* und den *Bologna Mem.* stehen. In der Abhandlung in den *Annali* studierte Cremona die Regelflächen $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades, welche eine m-fache und eine n-fache Leitlinie haben, und fand, daß deren asymptotische Kurven im allgemeinen algebraische Kurven von der Ordnung $2(m+n-1)$ sind. Eine Konstruktion dieser Kurven wurde später von Halphen angegeben (*Bull. Soc. math.* 5).

56) *Math. Ann.* 3; vgl. auch das. 21, dann ziehe man auch noch eine Abhandlung von Brill hinzu (*Math. Ann.* 5).

57) *Annali di Matem.* II, 1.

58) *Math. Ann.* 4.

59) *Math. Ann.* 1.

60) *Annali di Matem.* II, 7.

61) Z. B. sehe man Darboux (*Bull. Soc. math.* 2), Frahm (*Math. Ann.* 7), Lazzeri (*Annali della Scuola nuova sup. di Pisa*, 6), Guccia (*Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Reims*, 1880).

62) Ein wichtiger Begriff, den Clebsch bei seinen Studien über die Abbildung der Regelflächen aufstellte (*Math. Ann.* 5), ist der des Typus einer Fläche. Zwei Flächen sind von demselben Typus, wenn bei der Abbildung der einen auf die andere es keine Fundamentalpunkte giebt, z. B. ist die römische Fläche von Steiner von demselben Typus mit der Ebene.

63) S. die *Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini.*

einander entsprechend darstellen lassen. Und da man leicht erkannte, daß die Antwort auf diese Frage eine negative sei, so wurde man natürlich auf die andere Frage geführt: Welche Oberflächen lassen sich eindeutig auf einer Ebene abbilden? Oder allgemeiner: Welche Oberflächen kann man eindeutig auf einer gegebenen abbilden? — Die analoge Frage für zwei (ebene oder unebene) Kurven wurde von Clebsch vermittelst der Betrachtung des Geschlechtes und der Moduln gelöst. Diese Analogie veranlaßte nun Clebsch, die Lösung des vorhin angegebenen Problems in einer Ausdehnung des Begriffes des Geschlechtes auf die Oberflächen[64]) zu suchen. Dieser Versuch wurde jedoch nach meinem Dafürhalten nicht von gutem Erfolge gekrönt, und auch heute muß man trotz der nach Clebsch angestellten Versuche ausgezeichneter Mathematiker wie Cayley,[65]) Nöther,[66]) Zeuthen[67]) die Frage als noch ungelöst betrachten; um das zu beweisen, genügt es zu sagen, daß, wenn es auch bekannt ist, daß alle Oberflächen zweiter und dritter Ordnung (die nicht Kegelflächen sind) eindeutig auf einer Ebene abbildbar sind, doch noch nicht alle Oberflächen vierter Ordnung bestimmt sind, welche dieselbe Eigenschaft haben.[68])

---

64) *Comptes rendus,* 1868.

65) *Math. Ann.* 3.

66) *Annali di Matem.* II, 5; *Göttinger Nachr.* 1871 und 1873.

67) *Math. Ann.* 4, 9, 10.

68) Die Flächen vierter Ordnung, von denen man die Abbildung auf eine Ebene kennt, sind die rationalen Regelflächen, die römische Fläche, die Oberflächen mit einer Doppelgeraden oder einem doppelten Kegelschnitte, die Monoide und eine Oberfläche, die einen uniplanaren Doppelpunkt hat (s. eine Abhandlung von Nöther in den *Göttinger Nachr.* 1871 und eine von Cremona in den *Collectanea mathematica*). Wer die Abbildung einer Oberfläche auf einer anderen studieren will, darf die schönen Untersuchungen von Zeuthen (s. die vorige Note und *Comptes rendus,* 1870) nicht übergehen und die darauf folgenden von Krey (*Math. Ann.* 18) und Voß (*Math. Ann.* 27); einen nicht geringen Nutzen kann er auch aus der von Kantor (*Journ. für Math.* 95) aufgestellten Korrespondenz ziehen, die zwischen den Punkten einer gewissen kubischen Fläche und gewissen Tripeln von Punkten einer Ebene besteht.

Die allgemeineren Resultate, die man auf diesem Gebiete kennt, waren, wenn ich nicht irre, von Nöther[69]) erhalten; dieser gelangte durch eine überaus elegante analytische Betrachtung bei jeder Oberfläche, welche eine einfach unendliche Schar rationaler Kurven enthält, zu einer Abbildung derselben auf einem Kegel.

Die Schwierigkeit aber, auf welche man bei der eindeutigen Abbildung gewisser Oberflächen auf eine Ebene stieß, ließen bei Clebsch den Gedanken entstehen, zwischen einer Oberfläche und einer Ebene eine vielfache Korrespondenz aufzustellen, oder auch (wie er an die Riemannschen Flächen denkend sagte) eine Fläche auf eine vielfache Ebene abzubilden und dann diese auf eine einfache Ebene zu beziehen.[70]) Diese Idee, deren Keime sich vielleicht bis zu der von Chasles[71]) vorgeschlagenen Verallgemeinerung der stereographischen Projektion zurückverfolgen lassen, konnte nicht mehr vollständig von ihrem Urheber entwickelt werden; jedoch blieben die von ihm gegebenen Andeutungen nicht unfruchtbar, vielmehr entstand aus ihnen die Theorie der doppelten ebenen Transformationen, welche de Paolis aufgestellt und durch vielfache Anwendungen erläutert hat.[72])

Die zweite Verallgemeinerung der Cremonaschen Transformationen veranlaßte die Theorie der rationalen Transformationen im Raume. Zwei Beispiele einer solchen Korrespondenz boten sich in der Homographie zweier Räume (und deren Spezialfällen) dar und — wie Magnus,[73]) Hesse[74]) und Cremona[75]) bemerkt haben — in der Transformation, die man erhält durch drei zu demselben Raume korrelative (reciproke) Räume, indem man jedem Punkte jenes Raumes

69) *Math. Ann.* 3.

70) *Math. Ann.* 3.

71) *Aperçu historique,* Note 28.

72) *Lincei Mem.* 1876, 1877, 1878. Vgl. eine Note von Nöther in den *Erlanger Sitzungsberichten,* 1878.

73) *Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geom. d. Raumes,* S. 403 flg.

74) *Journ. für Math.* 49.

75) S. Note 55. Vgl. auch Sturm, *Math. Ann.* 19.

den Schnitt der Ebenen zuordnet, die ihm in diesen entsprechen. Die allgemeine Theorie entstand jedoch erst um das Jahr 1870 durch die Bemühungen Cayleys,[76]) Nöthers[77]) und Cremonas,[78]) obwohl schon Magnus[79]) Ende 1837 dieselbe angestrebt und ihre Wichtigkeit eingesehen hatte.

Von den bemerkenswerten Arbeiten, in welchen diese Gelehrten unsere Theorie im allgemeinen begründeten, ist ohne Zweifel die wichtigste jene, die wir der Feder unseres berühmten Landsmannes verdanken. Geleitet durch die Analogie, welche diese Disziplin mit der der eindeutigen Korrespondenz zwischen zwei Ebenen darbietet, zeigte er, wie jene sich auf das Studium der dreifach unendlichen homaloidischen Systeme von Oberflächen zurückführen läßt. Darauf setzte er auf eine sehr schöne Weise auseinander, wie man unendlich viele solcher Systeme erhalten könne, wenn man die ebene Abbildung einer Oberfläche kennt, und zeigte zuletzt durch treffende Beispiele, wie man die Theorie der rationalen Transformationen auf die Abbildung vieler Flächen auf andere zurückführt, insbesondere auf die ebene Abbildung einiger von ihnen. Diese Anwendung, vereint mit der obenerwähnten Methode, zeigt klar, wie man aus der ebenen Abbildung einer Oberfläche nicht nur die Abbildungen von unendlich vielen anderen erhalten kann, sondern auch unzählig viele rationale Transformationen des Raumes.

Ungeachtet der Schriften, durch welche England, Deutschland und Italien so mächtig zur Gründung und Erweiterung dieser Theorie beigetragen haben, kann man doch nicht sagen, daß dieselbe den Grad der Vollendung erreicht habe,

---

76) *Proc. Math. Soc.* 3.

77) *Math. Ann.* 3.

78) *Lombardo Rend.* 1871; *Annali di Matem.* II, 5; *Bologna Mem.* 1871—1872. Man sehe auch die neuesten Arbeiten desselben Geometers in den *Transactions of Edinburgh* 32, II. Th. und in den *Irish Trans.* 28 und *Proc. math. Soc.* 15.

79) *Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geom. des Raumes*, 1837, S. 417—418, Anmerkung.

den andere erlangt haben. Das kommt vielleicht daher, daß die schwierigsten Fragen, welche sich in derselben darbieten, innig mit der Bestimmung der Singularitäten der Oberflächen zusammenhängen, und über diese — wir müssen es leider gestehen — sind unsere Kenntnisse noch sehr beschränkt. Darin hat man vielleicht die Erklärung der Thatsache zu suchen, daß die Geometer, die auf jene oben erwähnten folgten, sich mehr mit der Erläuterung der Methoden ihrer Meister, als mit der Vervollkommnung derselben und der Ausfüllung ihrer Lücken beschäftigt haben.[80]) Und dennoch — wenn auch das Studium der Figur selbst ohne Zweifel dem der transformierten vorzuziehen ist — giebt es bei dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft sehr wenige Theorien, die so sehr es verdienen, daß man sie in allen ihren Einzelheiten vervollkommne, als gerade diese. In der That, um die Worte eines großen Mannes zu gebrauchen, „wenn man über das Verfahren der Algebra nachdenkt und den Grund

80) Unter diesen führe ich die Abhandlung von de Paolis an: *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine* n *con un punto* $(n-1)$*-plo* (*Giorn. di Matem.* 13) und die späteren über einige spezielle involutorische Transformationen des Raumes von Martinetti (*Lombardo Rend.* 1885) und von Paolis (*Lincei Trans.*, 1885). — Ich bemerke hier, was ich im Texte nicht thun konnte, daß es möglich ist, das Punktfeld auf einer Geraden abzubilden und den Punktraum auf einer Ebene. Um erstere Abbildung auszuführen, kann man jedem Punkte der Ebene ein Punktepaar der Geraden entsprechen lassen (Übertragungsprinzip von Hesse, *Journ. für Math.* 66). Bei der zweiten kann man einem Punkte des Raumes den Kreis zuordnen, der den Fußpunkt des von jenem auf die darstellende Ebene gefällten Lotes zum Mittelpunkt und zum Radius die Länge dieses Lotes hat, indem man hinzufügt, daß dieser Kreis in dem einen Sinne durchlaufen wird, wenn der Punkt auf der einen (bestimmten) Seite der Ebene liegt, im entgegengesetzten Sinne, wenn auf der anderen. Die Gesetze dieser Korrespondenz wurden von Fiedler vereinigt, um die Cyklographie zu bilden (s. das Werk *Cyklographie*, Leipzig, 1883, und die dritte Ausgabe der *Darstellenden Geometrie*) und wurden von ihm zur Lösung einiger Probleme angewandt (s. einige *Mitteilungen* für die naturforschende Gesellschaft in Zürich und *Acta math.* 5). Vor ihm jedoch hatte schon Crone verwandte Fragen in einer Dissertation behandelt, die sich in der *Tidsskrift for Mathematik* 6 findet.

der gewaltigen Vorteile aufsucht, die sie der Geometrie bietet, sieht man da nicht, daß sie dieselben der Leichtigkeit verdankt, mit welcher man anfänglich eingeführte Ausdrücke Transformationen unterziehen kann, Transformationen, deren Geheimnis und deren Mechanismus die wahre Wissenschaft bilden und die das ständige Ziel der Analysten sind? Ist es darum nicht natürlich, zu versuchen, in die reine Geometrie analoge Transformationen einzuführen, welche direkt auf die vorgelegten Figuren und ihre Eigenschaften hinsteuern?“[81])

Auf das allgemeine Studium der Transformationen folgt das solcher Transformationen, bei denen man einen gewissen Zweck im Auge hat,[82]) z. B. die Verwandlung der Figuren in sich selbst oder ihre Zurückführung zur ursprünglichen Figur, wenn die Transformationen mehrmals hintereinander angewandt werden. Es existieren in der That auch schon einige gute Arbeiten, in welchen die Kollineationen und Korrelationen behandelt sind, welche eine Fläche zweiter Ordnung, einen linearen Komplex[83]) oder eine kubische Raumkurve[84]) in sich selbst transformieren, sowie über die cyklischen Projektivitäten.[85])

---

81) Chasles, *Aperçu historique*, 2. Ausg. S. 196.

82) Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der anal. Geom. der Ebene*, 1833, S. 188 und 198.

83) Voß, *Math. Ann.* 13; Segre, *Torino Mem.* II, 37; Sturm, *Math. Ann.* 26. In diesen Abhandlungen wird der Leser auch die weiteren bibliographischen Einzelheiten finden.

84) Sturm, a. a. O.; Montesano, *Lincei Mem.* 1886.

85) Lüroth, *Math. Ann.* 11, 13; Schröter (das. 20); Veronese, *Lincei Mem.* 1881. S. auch einige der Abhandlungen, die sich in den *Gesammelten Werken* von Möbius 2 finden. Auch die Arbeiten von Rosanes führen wir hier an (*Journ. für Math.* 88, 90, 95, 100), von Sturm (*Math. Ann.* 1, 6, 10, 12, 15, 19, 22, 28; *Proc. math. Soc.* 7), und von Pasch (*Math. Ann.* 23, 26), die verwandte Gegenstände behandeln; dann noch die von Stephanos (*Math. Ann.* 23), von H. Wiener (*Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden*, Darmstadt, 1885), von Segre (*Torino Mem.* II, 28 und *Journ. für Math.* 100), von Sannia (*Lezioni di geometria projettiva*, in Neapel im Drucke befindlich) über die Kollineationen und Korrelationen.

Wir wollen diesen Abschnitt unserer Arbeit beschließen, indem wir noch einige Worte über die vielfachen Transformationen zwischen zwei Gebilden zweiter und dritter Stufe sagen, auf welche ich nur im Vorübergehen hinweisen konnte, indem ich einige Abhandlungen von Paolis anführte. Der erste, der sich mit ihnen beschäftigte, war Chr. Wiener,[86]) welcher sie untersuchte, indem er eine eindeutige Korrespondenz in der Ebene herstellte zwischen den Geraden einer Ebene und den Kurven eines linearen Systemes; dann ist einem Punkte, betrachtet als Schnitt zweier Geraden, die Gruppe der Grundpunkte des Büschels zugeordnet, der durch die entsprechenden Kurven konstituiert wird. Diese Art und Weise, vielfache Transformationen zu erzeugen, wurde von Tognoli[87]) auf den Raum ausgedehnt; derselbe ließ jedem Punkte, betrachtet als Schnitt dreier Ebenen, die Grundpunkte desjenigen Netzes entsprechen, das durch die drei den drei Ebenen entsprechenden Oberflächen eines dreifach unendlichen linearen Systemes bestimmt wird. Solche Untersuchungen haben sich bis jetzt jedoch noch nicht als sehr fruchtbar gezeigt. Ziemlich wichtig dagegen sind die schon genannten Untersuchungen von Paolis über die doppelten Transformationen. Das zeigen die Arbeiten, in denen Visalli[88]) und Jung[89]) die vielfachen Transformationen untersucht haben und welche die Fortsetzungen jener sind.

Mit einigen speziellen vielfachen Transformationen des Raumes haben sich Reye[90]) und Segre[91]) beschäftigt und von ihnen elegante Anwendungen gemacht. Aschieri[92]) übertrug eine spezielle ebene zweifache Transformation, welche Paolis bearbeitet hatte, auf den Raum und dehnte auch die

---

86) *Math. Ann.* 3.

87) *Giorn. di Matem.* 10.

88) Man sehe die beiden von ihm 1884 zu Messina veröffentlichten Abhandlungen.

89) *Lombardo Rend.* 1886; *Lincei Rend.* 1885.

90) *Die Geometrie der Lage.*

91) *Giorn. di Matem.* 21.

92) *Lombardo Rend.* II, 14 und 15.

Anwendungen, die jener davon gemacht hatte, auf die Nicht-Euklidische Geometrie aus. Allgemeine Untersuchungen auf diesem Gebiete haben wir jedoch keine außer den wenigen, die in einer kurzen Arbeit von Reye[93]) aufgezeichnet sind, und den sehr wichtigen über die doppelten Transformationen des Raumes von Paolis.[94]) Wir zweifeln nicht, daß diese und jene als Grundlage einer allgemeinen Theorie der zweifachen Transformationen, die wir noch erwarten, dienen können; und wir erwarten dieselbe mit Ungeduld, da wir sicher sind, daß dieselbe der Geometrie nicht geringere Dienste leisten wird, als die sehr bekannten, die ihr durch die birationalen Transformationen geleistet sind, und jene, die, wie Paolis bemerkt, die doppelten leisten können.

Neben die vielfachen Korrespondenzen zwischen zwei Räumen von Punkten (oder Ebenen) kann man die zwischen einem Punktraume und einem Ebenenraume stellen. Untersucht wurden dieselben für den Fall, daß durch jeden Punkt die entsprechenden Ebenen gehen und in jeder Ebene die entsprechenden Punkte liegen. Zusammen betrachtet bilden die zwei Räume ein höheres Nullsystem oder Punktebenensystem. Die Theorie dieser Systeme ist in diesen letzten Jahren besonders durch die Arbeiten von Ameseder,[95]) von Sturm[96]) und Voß[97]) hervorgetreten, während Reye[98]) das Verdienst zukommt, den Begriff des gemeinen Nullsystemes[99]) zuerst, doch in einer anderen Weise — die entsprechenden Elemente sind nicht Punkte und Ebenen, sondern Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse — erweitert zu haben.

93) *Journ. für Math.* 94.

94) *Lincei Mem.* 1884—1885.

95) *Wiener Ber.* 1881; *Journ. für Math.* 97.

96) *Math. Ann.* 19 und 28.

97) *Math. Ann.* 23.

98) *Journ. für Math.* 82, in dem Aufsatze über reciproke Verwandtschaft von F^2-Systemen und Φ^2-Geweben.

99) Über das gemeine Nullsystem vergl. die Note 3 des nächsten Abschnittes.

VII.

Geometrie der Geraden.

Die griechische Geometrie betrachtet den Punkt als das erzeugende Element aller Figuren; die analytische Geometrie des Cartesius machte die Bestimmung des Punktes zur Grundlage aller ihrer Rechnungen. Das Prinzip der Dualität führte nun die Gelehrten zu dem Schlusse, daß die Gerade in der Ebene und die Ebene im Raume mit gleichem Rechte und gleichem Erfolge, wie der Punkt, die Rolle spielen könne, die bis jetzt dieser in der Geometrie inne gehabt, und führte in der Folge dazu, die Gerade und die Ebene als Elemente der Ebene und des Raumes anzunehmen und ein neues System der (synthetischen und analytischen) Geometrie aufzustellen. Das Verdienst dieses bemerkenswerten Fortschrittes gebührt größtenteils Plücker.[1])

Aber ganz auf Plücker fällt der Ruhm, ein drittes die räumlichen Gebilde erzeugendes Element — die Gerade — eingeführt und auf eine solche Betrachtung eine neue Geometrie des Raumes begründet zu haben. Dieser berühmte Gelehrte kehrte, nachdem er fast zwanzig Jahre hindurch die Geometrie verlassen hatte, um seine bedeutenden Geisteskräfte der Physik zu widmen, zu der Wissenschaft zurück, die ihm ursprünglich seinen Ruhm gesichert hatte, um sie

1) „Bis in die neueren Zeiten stand die analytische Methode, wie sie Cartesius geschaffen, sozusagen nur auf einem Fuße. Plücker kommt die Ehre zu, sie auf zwei gleiche Stützen gestellt zu haben, indem er ein ergänzendes Koordinatensystem einführte. Diese Entdeckung war daher unvermeidlich geworden, nachdem einmal die Tiefblicke Steiners dem Geiste der Mathematiker zugeführt waren.“ Sylvester, *Phil. Mag.* III, 37, 1850, S. 363. Vgl. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 2, S. 453.

mit einer neuen und wichtigen Disziplin zu beschenken, mit „der Geometrie der Geraden".

Die ersten Mitteilungen über diesen Gegenstand, die im Jahre 1865 der Königlichen Gesellschaft zu London[2]) von dem großen deutschen Geometer gemacht wurden, enthalten die Sätze über einige allgemeine Eigenschaften der Komplexe, Kongruenzen und Regelflächen und einige spezielle Eigenschaften der linearen Komplexe und Kongruenzen;[3]) die Beweise derselben sind nur angedeutet und sollen, nach Angabe des Autors, vermittelst der Koordinaten einer Geraden im Raume geführt werden, die er als einen eigenen Gedanken eingeführt hatte, die man später aber als Spezialfall dessen erkannte, was schon Cayley[4]) aufgestellt hatte, um vermittelst einer einzigen Gleichung eine beliebige Kurve im Raume darstellen zu können.

Diese Mitteilungen veranlaßten plötzlich eine Reihe wichtiger Arbeiten, in denen Battaglini nicht nur, was Plücker behauptet hatte, sondern auch viele Lehrsätze bewies, die sich auf die Komplexe zweiten und höheren Grades beziehen.[5]) — Indessen hatte Plücker schon die von ihm

2) S. *Phil. Trans.*, 1865, S. 725; 1866, S. 361.

3) Est ist wohl zu beachten, daß ein linearer Komplex ein reciprokes Nullsystem veranlaßt und daß dieses zuerst von Giorgini (*Memorie della Società italiana delle scienze* 20, 1827), dann aber auch von Möbius (*Lehrbuch der Statik* I; vgl. auch *Journ. für Math.* 10, 1833) und von Chasles (*Aperçu historique*, 1837) in ihren statischen und kinematischen Untersuchungen und von demselben Chasles und Staudt bei der Bestimmung der involutorischen reciproken Beziehungen gefunden wurde.

4) *Cambridge Trans.* 11, Teil 2; *Quart. Journ.* 3.

5) *Giorn. di Matem.* 6, 7, 10, 18. Wenn auch Battaglini seinen Studien über die quadratischen Komplexe eine Gleichung zu Grunde legte, die nicht den allgemeinsten Komplex ihres Grades darstellt, so gelten doch viele von den Schlüssen, die er gemacht hat, — man kann sagen alle, mit Ausnahme derjenigen, welche sich auf die singuläre Fläche und die singulären Strahlen des Komplexes beziehen — für allgemeine Komplexe, indem sie unabhängig sind von der Gestalt dieser Gleichung. Auch die von ihm aufgestellten Formeln passen sich mit leichten Änderungen größtenteils dem allgemeinen Falle an.

skizzierten Gedanken ausgeführt und in dem Werke vereinigt, welches den Titel trägt: *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.*[6])

Von diesem Buche zu sagen, daß es in allen seinen Teilen gleich wichtig und interessant sei, würde eine der Wahrheit nicht entsprechende Behauptung sein. Plücker schätzte nicht die Eleganz der Rechnung, an die wir durch Lagrange, Jacobi, Hesse, Clebsch gewöhnt sind; er teilte sicherlich nicht mit Lamé[7]) die Ansicht, daß „die Bezeichnung für die Analysis das sei, was die Stellung und Wahl der Worte für den Stil ist"; bei ihm brauchte die Rechnung nur der einen Bedingung zu genügen, nämlich schnell zur Lösung der ins Auge gefaßten Probleme zu führen. Dieser Mangel, der allen Arbeiten von Plücker gemeinsam ist, macht sich lebhafter in dem letzten Werke bemerklich, welches einen Wettstreit eingehen sollte mit Mustern der Eleganz, wie den *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes* von Hesse und den *Vorlesungen über Dynamik* von Jacobi, die kurz vorher (1861 und 1866) herausgekommen waren. Außer diesem nicht geringen Mangel ist ein anderer noch bedeutenderer dadurch entstanden, daß Plücker lange Zeit hindurch es vernachlässigt hatte, den Fortschritten der Geometrie nachzugehen. Infolge dieser einseitigen Ausbildung finden wir in seinem Buche eine Menge von Untersuchungen, die uns nicht mehr interessieren, da sie unter andere allgemeinere, schon gemachte fallen, eine große Anzahl von Spezialfällen, von deren Wichtigkeit wir uns nicht überzeugen können, eine Menge von komplizierten Formeln, deren Nutzen wir nicht einsehen. Trotz dieser Fehler — die ich anführen muß, um die geringe Anzahl der Leser, die sie heute findet, zu begründen — kann man nicht verkennen, daß die letzte Arbeit von Plücker reich an originellen Blicken ist, und es würde die Lektüre derselben jedem zu raten sein, der das Studium dieses Teiles der Geometrie unternehmen will, wenn nicht die Nachfolger

6) Leipzig, 1868 — 1869.

7) S. dessen *Examen des différentes méthodes* etc.

Plückers seine Untersuchungen [illegible]
gesetzt und mit anderen [illegible]
die er nur hingeworfen hat. [illegible]

Plücker hatte nicht die Zeit, die Theorie der Komplexe zweiten Grades zu vollenden, da der erste Teil seines Buches gerade im Begriffe stand, den zweiten Teil seines Buches zu veröffentlichen; aber die Untersuchungen, die er unvollendet zurückließ, wurden von seinem Schüler F. Klein zu Ende geführt. Ihm verdanken wir nicht nur den allgemeinen Begriff der Koordinaten einer Geraden und eine Anzahl schöner Lehrsätze über die Komplexe zweiten Grades, sondern auch verschiedene allgemeine und fruchtbare Ideen über die Geometrie der Geraden. In der Tat ist es Klein, der, einen Gedanken seines Lehrers präzisierend, die Bemerkung machte, daß man die Geometrie der Geraden ansehen könne als das Studium einer gewissen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, analogen [illegible] Raume von fünf Dimensionen, [illegible]
durch eine einzige [illegible]
Geraden [illegible]
Lehrsatz [illegible]
[illegible]
die [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

mit der Geometrie der Geraden, indem sie verschiedene Fragen derselben vermittelst homogener Koordinaten behandelten. Clebsch[14]) wandte auf diese Theorie die Methode der abgekürzten Bezeichnung an; im Jahre 1873 vervollständigte Weiler[15]) die Einteilung der Komplexe zweiten Grades nach den Begriffen, die Klein in seiner Dissertation angegeben hatte. Voß[16]) studierte in einer Reihe sehr wichtiger Abhandlungen die Singularitäten der Systeme von Geraden; Halphen bestimmte die Zahl der Geraden des Raumes, welche vorher aufgestellten Bedingungen genügen;[17]) Nöther,[18]) Klein[19]) und Caporali[20]) beschäftigten sich mit der Abbildung der Komplexe ersten und zweiten Grades auf den gewöhnlichen Raum, Aschieri mit der einiger spezieller Komplexe;[21]) Lie stellte den innigen Zusammenhang, der zwischen der Geometrie der Kugel und der Geometrie der Geraden besteht, ins Licht;[22]) Reye endlich studierte die Formen der allgemeinen quadratischen Komplexe.[23]) Nur mit Hilfe der synthetischen Geometrie wurde unsere Theorie von Chasles studiert[24]) — schon 1839 —, von Reye,[25])

---

14) *Math. Ann.* 2, 5.

15) *Math. Ann.* 7. Man kann es nur beklagen, daß die in verschiedener Beziehung so ausgezeichnete Arbeit von Weiler eine große Zahl von Ungenauigkeiten enthält.

16) *Math. Ann.* 8, 9, 10, 12, 13. S. auch Schubert das. 12 und dessen *Abzählende Geometrie.*

17) *Comptes rendus* 74, 75; *Bull. Soc. math.* 1.

18) *Göttinger Nachr.* 1869.

19) *Göttinger Nachr.* 1869.

20) *Lincei Mem.* 1877—1878.

21) *Giorn. di Matem.* 8; *Lombardo Rend.* II, 12, 13, 14.

22) *Math. Ann.* 5. Vgl. eine Abhandlung von Cremona, gelesen vor der *Accademia dei Lincei* (*Atti* II, 3).

23) *Journ. für Math.* 98. Vgl. auch 95 und 97.

24) *Liouvilles Journ.* 4.

25) *Die Geometrie der Lage,* 2. Abt. 2. Aufl., in der sich die von Reye in dem *Journ. für Math.* veröffentlichten synthetischen Arbeiten über die Geometrie der Geraden vereinigt finden.

von Silldorf,[26]) Schur,[27]) Bertini,[28]) von d'Ovidio[29]) und von W. Stahl;[30]) Buchheim[31]) bediente sich der Quaternionen, um die hauptsächlichsten Eigenschaften der linearen Kongruenzen zu beweisen, während viele Fragen aus der Infinitesimalgeometrie, die sich auf Systeme von Geraden beziehen, glücklich in einigen Abhandlungen von Mannheim,[32]) Lie,[33]) Klein,[34]) Picard[35]) und Königs[36]) gelöst wurden. Schließlich wurden einige spezielle Komplexe studiert von Aschieri,[37]) Painvin,[38]) von Reye,[39]) Lie,[40]) Weiler,[41]) Roccella,[42]) von Hirst,[43]) Voß,[44]) Genty,[45]) Montesano,[46]) von Segre und von mir.[47])

Neben der reichhaltigen Schar von Schriften, die wir dem von Plücker gegebenen Anstoße verdanken, müssen wir noch eine andere ebenso glänzende erwähnen, die aber

---

26) *Zeitschr. f. Math.* 20.

27) *Dissertation* (Berlin, 1879) oder *Math. Ann.* 15.

28) *Giorn. di Matem.* 17; *Lincei Rend.* 1879.

29) *Torino Atti,* 1881.

30) *Journ. für Math.* 91, 92, 93, 94, 95, 97.

31) *The Messenger of Mathematics* II, 13.

32) *Liouvilles Journ.* II, 17.

33) S. Note 22.

34) *Math. Ann.* 5.

35) *Ann. Éc. norm.* II, 6; *Grunerts Arch.* 40.

36) *Ann. Éc. norm.* III, 1.

37) S. Note 21.

38) *Nouv. Ann.* II, 2; *Liouvilles Journ.* II, 19.

39) *Die Geometrie der Lage.*

40) *Göttinger Nachr.* 1870.

41) *Journ. für Math.* 95; *Zeitschr. f. Math.* 24, 27.

42) *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi correspondenti in due o piu fasci projettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina, 1882).

43) *Proc. math. Soc.* 10; *Collectanea mathematica,* 1881.

44) *Math. Ann.* 13.

45) *Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre, qui ont un centre de figure* (*Liouvilles Journ.* III, 8).

46) *Sui complessi di rette di secondo grado generati da due fasci projettivi di complessi lineari* (Napoli, 1886), und *Napoli Rend.* 1886.

47) *Math. Ann.* 23; *Giorn. di Matem.* 23; *Torino Atti,* 1884.

von ganz anderer Art ist. Sie umfaßt die Arbeiten von Dupin,[48]) Malus[49] (1775—1811) und Ch. Sturm[50]) (1803—1855), Bertrand,[51]) Transon[52]) über die Normalen von Oberflächen und über die mathematische Theorie des Lichtes, dann die von Hamilton (1805—1865) über Systeme von Strahlen.[53]) Diese Arbeiten finden ihre Krönung in zwei berühmten Abhandlungen, die von Kummer in den Jahren 1857 und 1866 veröffentlicht sind.

In der ersteren, die im *Journal für Mathematik*[54]) abgedruckt ist, hat sich Kummer die Aufgabe gestellt, durch eine einheitliche und einfachere Methode die Resultate von Hamilton darzulegen und sie in den Punkten, wo sie mangelhaft erschienen, zu vervollständigen.[55])

In der zweiten,[56]) die noch wichtiger ist, stellte er sich, nach einigen schönen allgemeinen Untersuchungen über die Zahl der Singularitäten eines Systemes von Strahlen und seiner Brennfläche, und löste die Frage, alle algebraischen Systeme von Strahlen erster und zweiter Ordnung zu bestimmen, d. h. solche, bei denen durch jeden Punkt des Raumes einer oder zwei Strahlen des Systemes hindurchgehen.

Ich möchte wünschen, daß mir hinreichender Raum zu Gebote stände, um den Leser in den Stand zu setzen, die ausgezeichneten Verdienste dieser klassischen Arbeit hoch

---

48) *Applications de Géometrie et de Méchanique*, 1822.

49) *Journ. Éc. polyt.* 14.

50) *Comptes rendus* 20.

51) *Liouvilles Journ.* 15.

52) *Journ. Éc. polyt.* 38.

53) *Irish Trans.* 16, 1831.

54) Bd. 57.

55) Die Eigenschaften der unendlich dünnen Strahlenbündel, mit denen Kummer sich in dieser Abhandlung beschäftigt, gaben später (1862) Stoff zu einer schönen Arbeit von Möbius (*Leipziger Ber.* 14; *Werke* 4), an welche sich dann die von Zech (*Zeitschr. f. Math.* 17) veröffentlichten Untersuchungen knüpfen; vgl. auch eine neuerliche Abhandlung von Hensel (*Journ. für Math.* 102).

56) *Berliner Abh.* 1866.

zu schätzen, um ihn an der tiefen Bewunderung teilnehmen zu lassen, die ich für sie empfinde; ich möchte ihn sehen lassen, mit welch ausserordentlicher Gewandtheit der Verfasser zur Bestimmung aller Strahlensysteme erster und zweiter Ordnung zu gelangen weiß, zu den Gleichungen, die sie und ihre Brennflächen darstellen (welches jene Oberflächen vierter Ordnung mit Doppelpunkten sind, die ich Gelegenheit hatte, im Abschnitt III zu erwähnen), zu den Singularitäten der Systeme, den Konfigurationen, die sie bilden, zum Zusammenhange zwischen ihnen und den Singularitäten der Brennfläche u. s. w. Aber da die Bemessenheit des Raumes es mir verbietet, so muß ich mich darauf beschränken, den Wunsch auszusprechen, daß dieser mein kurzer Überblick es bewirken könne, daß bei jedwedem das Verlangen entsteht, die Untersuchungen Kummers selbst kennen zu lernen und den Weg zu verfolgen, den er mit solchem Glücke eingeschlagen hat; ich spreche diesen Wunsch aus, da mich die Beobachtung schmerzlich bewegt, daß in den zwanzig Jahren, die schon seit dem Erscheinen der Kummerschen Arbeit verflossen sind, es noch nicht gelungen ist, eine solche Theorie, die sich so fruchtbar an schönen Resultaten gezeigt hat, in einer bemerkenswerten Weise zu fördern.[57])

57) Von noch erschienenen Arbeiten, die man als eine Fortsetzung derer von Kummer ansehen kann oder die auf anderem Wege zu dessen Resultaten geführt haben, erwähne ich: Reye (*Journ. für Math.* 86 und 93), Hirst (*Proc. math. Soc.* 16), Stahl (s. Note 30), Caporali (*Napoli Rend.* 1879), Loria (*Torino Atti,* 1884 und 1886) — oder von solchen, die zu diesen einige neue Formeln oder ein neues algebraisches Strahlensystem hinzugefügt haben: Kummer (*Berliner Ber.* 1878), Masoni (*Napoli Rend.* 22), Roccella (s. Note 42), Hirst (*Proc. math. Soc.* 16 und 17; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 1), Sturm (*Math. Ann.* 6; *Journ. für Math.* 101).

VIII.

Nicht-Euklidische Geometrie.

Die letzte Kategorie von Arbeiten, mit denen ich mich zu beschäftigen habe, umfaßt eine Reihe von Untersuchungen, die zu lebhaften Diskussionen Veranlassung gegeben haben und — wunderbar zu sagen — eine Zeit lang die Mathematiker in zwei Feldlager geteilt haben, „das eine gewappnet gegen das andere“;[1]) heutzutage bilden sie denjenigen Teil der Wissenschaft des Raumes, den man „Nicht-Euklidische Geometrie“ und „Theorie der beliebig aus-

1) Zum Beweise, daß die Fragen, auf welche sich diese Arbeiten beziehen, bei einigen Gelehrten jene Ruhe und Unparteilichkeit des Urteils, die immer bei ihren Diskussionen walten sollte, aufgehoben haben, will ich hier zwei Stellen anführen, die eine von einem Schriftsteller, der allen, welche sich mit Philosophie beschäftigen, sehr wohl bekannt ist, die andere aus einer Zeitschrift, die in Deutschland ziemlich verbreitet ist: „. . . . so gewiß ist es logische Spielerei, ein System von vier oder fünf Dimensionen noch Raum zu nennen. Gegen solche Versuche muß man sich wahren; sie sind Grimassen der Wissenschaft, die durch völlig nutzlose Paradoxien das gewöhnliche Bewußtsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe täuschen“ (Lotze, *Logik*, S. 217). „Die absolute oder Nicht-Euklidische Geometrie, die Geometrie des endlichen Raumes und die Lehre von *n* Raumdimensionen sind entweder Karrikaturen oder Krankheitserscheinungen der Mathematik“ (J. Gilles, *Blätter für das Bayrische Gymnasial- und Realschulwesen* 28, S. 423). Man sehe auch die heftigen Äußerungen Dührings, die von Erdmann in seiner trefflichen Abhandlung: *Die Axiome der Geometrie* (Leipzig, 1877, S. 85) wiedergegeben sind, ferner Kroman, *Unsere Naturerkenntnis*, deutsch von Fischer-Benzon (Kopenhagen, 1883, S. 145 bis 175); endlich die Kap. 13 und 14 des Werkes von Stallo, *La matière et la physique moderne* (Paris, 1884). Auf Vorwürfe von der oben erwähnten Art erwidern wir mit d'Alembert: *„Allez en avant, et la foi vous viendra!“*

gedehnten Mannigfaltigkeiten" oder „Geometrie von n Dimensionen"[2]) nennt.

Jeder weiß, daß unter allen Sätzen, die in den *Elementen* des Euklid enthalten sind, es einen giebt,[3]) der nur schlecht dazu paßt, wie es der griechische Geometer gethan hat, unter die Axiome oder die Postulate gestellt zu werden.[4]) Derselbe ist von großer Wichtigkeit im Euklidischen System, da auf ihn, wie man sagen kann, die ganze Theorie der Parallelen gegründet ist. Weil es nun nicht auf Grund unmittelbarer Anschauung gerechtfertigt ist, ihn unter diejenigen Sätze zu zählen, für welche es vergeblich ist, einen Beweis zu fordern, so kam man auf die Frage, ob er in der That unbeweisbar sei, und ob man nicht, wenn das der Fall sein sollte, ihn unterdrücken und durch einen anderen ersetzen könne, dessen Wahrheit offenbarer sei?

Diese Fragen sind ein natürlicher Ausfluß unseres Zeitalters, von welchem eine der hervorragendsten Eigentümlichkeiten (wie Humboldt bemerkt) die unparteiliche Kritik alles dessen ist, was uns die Vergangenheit hinterlassen hat; sie müssen als der erste Ursprung der Nicht-Euklidischen Geometrie angesehen werden.

Die ersten wichtigen Studien auf diesem Gebiete wurden gegen Ende des vergangenen Jahrhunderts von Legendre[5])

---

2) Als Litteraturnachweis für diesen Teil der Geometrie sehe man die Artikel von G. Bruce-Halsted, veröffentlicht im *Amer. Journ.* 1 und 2.

3) Es ist dieser Satz: „Wenn bei einer Geraden, welche zwei andere schneidet, die Summe der inneren Winkel auf derselben Seite kleiner als zwei Rechte ist, so schneiden sich letztere auf derselben Seite." D'Alembert nannte diesen Satz: *„l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie"*.

4) Eine Zeit lang glaubte man, daß der fragliche Satz von Euklid unter die Axiome gestellt sei; aber neuere historische Untersuchungen (s. Hankel, *Vorlesungen über komplexe Zahlen und ihre Funktionen*, S. 52) neigen zu der Ansicht, daß derselbe irrtümlicher Weise von den Abschreibern zu den Axiomen geschrieben sei, während er im Originale unter den Postulaten gestanden hatte.

5) Vgl. *Die Elemente der Mathematik* von Baltzer, 4. Teil, Planimetrie.

gemacht. Dieselben stellten den Zusammenhang klar, der zwischen dem Postulate des Euklid und dem Satze besteht, der sich auf die Winkelsumme eines Dreiecks bezieht, und führten Legendre dazu, nicht nur jenes Postulat durch ein anderes viel wichtigeres zu ersetzen, sondern auch eine Geometrie zu entwerfen, die von eben demselben Postulate unabhängig ist.[6])

Nahe zur selben Zeit wie Legendre, befaßte sich Gauß mit dieser Frage. Gleichwohl hat er niemals irgend eine Arbeit auf diesem Gebiete veröffentlicht; seine Korrespondenz mit Schumacher[7]) und mit Wolfgang Bolyai (1775—1856)[8]) und einige bibliographische Artikel von ihm[9])

---

6) Man erzählt, Lagrange habe beobachtet, daß die sphärische Geometrie von dem Euklidischen Postulate unabhängig sei, und gehofft, aus dieser Beobachtung eine Art und Weise ableiten zu können, den Ungelegenheiten der Euklidischen Methode zu entgehen, indem er die ebene Geometrie als die Geometrie auf einer Kugel mit unendlich großem Radius betrachtete.

7) *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher,* herausgegeben von Peters, 6 Bände (Altona, 1860—1865); die betreffenden Stellen dieses Briefwechsels sind von Hoüel ins Französische übersetzt und seiner 1866 erschienenen französischen Übersetzung von Lobatschewskys *Geometrischen Untersuchungen* (vgl. Note 10) zugefügt.

8) Vgl. die Gedächtnisschrift auf Gauß von Schering in den *Göttinger Abh.* 22 (1877).

9) *Göttingische Gelehrte Anzeigen,* 1816 und 1822; oder *Gauss' Werke* 4 (1873), S. 364 und 368. Vgl. auch Sartorius von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtnis* (Leipzig, 1856), S. 81. — Möge es gestattet sein, hier die Mitteilung anzuschließen, daß Gauß das alte Problem der Kreisteilung, in dem man seit zwei Jahrtausenden nicht vorwärts gekommen war, durch Untersuchungen auf einem Gebiete wesentlich gefördert hat, das ohne Zusammenhang mit diesem Problem schien und auf welchem man solchen Gewinnst für die Geometrie nicht erwartete (*Disquisitiones arithmeticae,* Leipzig, 1801; *Werke* 1; vgl. Bachmann, *Die Lehre von der Kreisteilung,* Leipzig, 1872), indem er zeigte, daß die Teilung in n Teile mit Hilfe von Lineal und Zirkel auch noch möglich ist, wenn n eine Primzahl von der Form $2^m + 1$ ist. Man sehe hierzu auch Legendre, *Eléments de trigonométrie,* Anhang; Richelot, Staudt, Schröter, *Journ. für Math.* 9, 24, 75; Affolter, *Math. Ann.* 6.

bezeugen nicht nur das Interesse, das er dafür besaß, sondern bekunden auch die reiche Ernte von Wahrheiten, die er auf diesem, wie auf den anderen von ihm bebauten Feldern eingebracht hat. Und als die Schriften von Lobatschewsky (1793—1856)[10]) und Johann Bolyai (1802—1860)[11]) über diesen Gegenstand erschienen, da sanktionierte der Fürst der deutschen Mathematiker mit seiner Autorität die Ergebnisse, welche dieselben erhalten hatten. Man kann diese Ergebnisse zusammenfassen, indem man sagt, daß dieselben die Grundlage einer neuen Geometrie sind, die vollständig unabhängig ist von dem Postulate des Euklid (die Nicht-Euklidische Geometrie, oder imaginäre oder auch Pangeometrie), die in gewissen Punkten mit der gewöhnlichen Geometrie übereinstimmt, jedoch in vielen anderen sich von ihr unterscheidet, — eine Geometrie, die eine Zeit lang einige als absurd verbannt haben wollten, da sie den von einer nur oberflächlichen Sinneswahrnehmung bezeugten Erscheinungen widerspricht, die aber heute allgemein angenommen ist, da ihr logischer Wert außer Zweifel gestellt ist.[12])

10) *Courier von Kasan,* 1829—1830; *Abhandlungen der Universität Kasan*, 1835, 1836, 1837, 1838; *Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien* (Berlin, 1840); *Journ. für Math.* 17.

11) Die Schrift von Johann Bolyai erschien als Anhang des Werkes von W. Bolyai: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae . . . . . introducendi,* 2. Bd. (Maros-Vásárhely 1833), wurde dann ins Französische übersetzt von Hoüel (*Mémoires de Bordeaux*), ins Italienische von Battaglini (*Giorn. di Matem.* 5).

12) Es ist das Verdienst Hoüels (?—1886) und Battaglinis, die Werke von Lobatschewsky und Bolyai durch Übersetzungen und vorzügliche Kommentare (s. Note 7 und 11 und *Giorn. di Matem.* 5 und 8) verbreitet zu haben. — Heute ist es leicht, die Nicht-Euklidische Geometrie zu lernen, da Flye Ste Marie (*Etudes analytiques sur la théorie des parallèles,* Paris, 1871), Frischauf (*Elemente der absoluten Geometrie,* Leipzig, 1876) und de Tilly (*Essai sur les principes fundamentaux de la géométrie et de la mécanique,* Bordeaux, 1879) methodische Bearbeitungen derselben geschrieben haben. In England wurden die neuen Ideen über die Prinzipien der Geometrie bearbeitet und herrlich dargestellt von Clifford; man sehe die Schrift *Lectures and Essays*, sowie die von Smith den *Mathematical Papers by W. K. Clifford* (London, 1882) vorausgeschickte Einleitung.

Zu diesem Siege der Logik über den übertriebenen Empirismus haben in sehr wirkungsvoller Weise einige Schriften von großer Bedeutung beigetragen, die Riemann (1827 — 1866), von Helmholtz und Beltrami in den Jahren 1867 und 1868 veröffentlichten.

Die Riemannsche Schrift: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*[13]) — zwölf Jahre vor ihrer Veröffentlichung geschrieben — war und ist noch durch die Allgemeinheit der Begriffe und die Knappheit der Form selbst für diejenigen, welche in der Mathematik schon vorgeschritten sind, von schwierigem Verständnisse. Jedoch ein großer Teil der Ideen, welche dieselbe enthält, verbreiteten sich sehr bald, da sie, durch ein glückliches Zusammentreffen, auch von Helmholtz ausgesprochen wurden, und dieser sie nicht nur den Mathematikern in rein wissenschaftlicher Form darlegte,[14]) sondern auch in populären Vorträgen und Artikeln in verschiedenen Zeitschriften auch außerhalb des engeren Kreises der Geometer behandelte.[15]) Keinen geringeren Einfluß aber als die Schriften des berühmten Verfassers der *Physiologischen Optik* übte der klassische *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea*[16]) von Beltrami aus. Gerade die Schärfe und analytische Eleganz, welche diese Schrift auszeichnen, lenkte die Aufmerksamkeit der Geometer auf dieselbe; das glänzende und überraschende Resultat, daß die Sätze der Nicht-Euklidischen Geometrie ihre Verwirklichung auf den Oberflächen mit konstanter negativer Krümmung fanden, machte einen tiefen Eindruck auch auf diejenigen, welche jeder nicht durch das

13) *Göttinger Abh.* 13 (1867), oder *Gesammelte Werke* (Leipzig, 1876), ins Französische übersetzt von Hoüel (*Annali di Matem.* II, 8), ins Englische von Clifford (*Nature* 8 oder *Mathematical Papers* S. 55).

14) In der Abhandlung *Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Göttinger Nachr.* 1868).

15) Hierzu sehe man *Populäre wissenschaftliche Vorträge* von Helmholtz (Braunschweig, 1871—1876); *Revue des cours scientifiques*, 9. Juli 1870 etc.

16) *Giorn. di Matem.* 6. Dieser Artikel wurde ins Französische übersetzt von Hoüel und veröffentlicht in den *Ann. Éc. norm.* 6, 1869.

Experiment bewiesenen Behauptung allen Wert absprachen, und sicherte den Triumph der neuen Anschauungen; endlich — die dort verteidigten gesunden Prinzipien einer wissenschaftlichen Philosophie und die glänzende Form, in welcher die Abhandlung geschrieben ist, ließen und lassen noch bei allen eine lebhafte Bewunderung für unseren berühmten Landsmann entstehen, durch dessen Bemühung wiederum einmal die Wahrheit den Sieg davontrug.

Daß die Arbeiten dieser drei großen Gelehrten einen wohlthätigen Einfluß auf die ganze Geometrie ausgeübt haben, hat sich zur Evidenz durch die Änderung gezeigt, welche sich in bezug auf die Art und Weise vollzogen hat wie man heutzutage die ihr zu Grunde liegenden Sätze betrachtet.[17]) Wenn früher die Geometer den Philosophen die Sorge überließen, zu entscheiden, ob die Wahrheiten, mit denen sie sich beschäftigten, notwendige oder zufällige seien, und dahin neigten, dieselben als notwendige zuzulassen, so streben sie jetzt, nachdem die empirische Grundlage der Geometrie erkannt ist, fortwährend darnach, genau festzusetzen, welche Thatsachen man der Sinneswahrnehmung entnehmen muß, um eine Wissenschaft der Ausdehnung zu gründen.[18]) Wer die schönen *Vorlesungen über neuere Geo-*

17) Man vergleiche hierzu die Worte, mit denen d'Alembert die Meinung zurückwies, daß die Wahrheiten der Mechanik experimentelle seien (*Traité de Dynamique*, Paris, 1858, *Discours préliminaire*, S. XII), mit den folgenden von Clifford (*The Common Sense of the Exact Sciences*, London, 1885, *International Scientific Series* 51): „In derselben Weise, wie wir, um irgend einen Zweig der Physik zu schaffen, von der Erfahrung ausgehen und auf unsere Experimente eine gewisse Anzahl von Axiomen stützen, welche solchergestalt die Grundlage desselben bilden, so sind die Axiome, die wir als Grundlage der Geometrie nehmen, wenn auch weniger offenbar, in der That ein Ergebnis der Erfahrung." Man sehe auch das Werk von Hoüel, *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes* (Prag, 1875), oder die Übersetzung, die davon in *Grunerts Arch.* 59 veröffentlicht wurde.

18) Ich bemerke, daß, wer die *Ausdehnungslehre* des großen deutschen Geometers und Philologen Hermann Graßmann liest, mit Erstaunen sehen wird, daß er schon 1844 zu Schlüssen gelangt war, die von den im Texte angegebenen nicht sehr ver-

metrie (Leipzig, 1882) von Pasch liest, die neueren Lehrbücher prüft und diese und jene mit den älteren Büchern vergleicht, wird wesentliche Unterschiede finden.

In den älteren Werken giebt der Lehrer die Voraussetzungen, die er nicht beweist, als notwendige, ewige und unanfechtbare Wahrheiten, in den neueren führt er sozusagen den Schüler dazu, die nötigen Erfahrungen auszuführen, um die Prämissen der späteren Deduktionen festzustellen. In den älteren Arbeiten stellt der Verfasser die Euklidische Geometrie als die einzig denkbare hin, in den neueren als

---

schieden sind. Aber wer weiß wicht, daß, um geschätzt zu werden, dieses ausgezeichnete Werk nötig hatte, daß andere auf einem anderen Wege zu den äußerst originellen Wahrheiten gelangten, die es enthält? — Hier scheint es mir angebracht zu sein, eine Erklärung zu geben, welche zu meiner Rechtfertigung dient. Bei dieser kurzen Geschichte der Kämpfe, welche die Geometer in diesen letzten Zeiten ausgefochten haben, traf es sich selten und nur flüchtig, daß ich Arbeiten von Graßmann zitierte, und ich glaube nicht, daß ich noch Gelegenheit haben werde, diesen Namen auszusprechen. Das heißt nicht, daß dieser Geometer nicht der Erwähnung würdig sei, daß seine Entdeckungen und seine Methoden nicht verdienten, bekannt zu werden; aber es liegt daran, daß der Formalismus, in den er seine Gedanken gekleidet, sie den meisten unzugänglich gemacht und ihnen fast jede Möglichkeit genommen hat, irgend einen Einfluß auszuüben. Graßmann war während eines großen Teiles seines Lebens ein Einsiedler in der Mathematik; nur während seiner letzten Jahre befaßte er sich damit, etliche seiner Produktionen in modernem Gewande zu veröffentlichen, um deren Verwandtschaft mit denen seiner Zeitgenossen zu zeigen (man sehe *Math. Ann.* 10, 12; *Göttinger Nachr.* 1872; *Journ. für Math.* 84); daher ist es natürlich, daß ihn zu nennen demjenigen selten widerfährt, welcher sich vornimmt, die Errungenschaften zu beschreiben, die man den vereinten Anstrengungen der modernen Geometer verdankt. — Man vergleiche Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (Turin, 1888). — Über die wissenschaftlichen Verdienste Graßmanns sehe man einen Artikel von Cremona in den *Nouv. Ann.* I, 19, dann den 14. Bd. der *Math. Ann.* und den 11. Bd. des *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche.* Ein Vergleich zwischen den Methoden Graßmanns und anderen moderneren wurde von Schlegel in der *Zeitschr. f. Math.* 24 gemacht.

eine der unendlich vielen, die man aufstellen könnte. Und diese Unterschiede bezeichnen einen thatsächlichen Fortschritt, da sie zeigen, daß die Gelehrten sich von einem alteingewurzelten und schädlichen Vorurteile frei gemacht haben; und für den Fortschritt der Wissenschaft hat die Erkenntnis eines Irrtums eine nicht geringere Wichtigkeit, als die Entdeckung einer Wahrheit.

Kurz nach der Veröffentlichung der Arbeit von Beltrami erschien eine von F. Klein,[19]) die auch von großer Wichtigkeit ist; aber um die Stellung zu kennzeichnen, welche dieselbe in der Geschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie einnimmt, muß ich mich einige Jahrzehnte rückwärts wenden.

Es ist bekannt, daß infolge des *Traité des propriétés projectives des figures* eine Unterscheidung aufgestellt wurde zwischen den Eigenschaften der Figuren, die erhalten bleiben, wenn diese projiziert werden, und solchen, die nicht erhalten werden; es ist ferner bekannt, daß unter den ersteren alle Lagen-Eigenschaften, aber nur einzelne metrische Eigenschaften begriffen sind. Nun stellten die Geometer sich die Frage, ob es nicht möglich sei, die metrischen Eigenschaften der Figuren so auszusprechen, daß sie bei der Projektion sämtlich erhalten werden. Für einige Arten der Projektion haben Chasles und Poncelet die Frage gelöst, indem sie den Begriff der unendlich fernen Kreispunkte der Ebene und des unendlich entfernten imaginären Kreises einführten; für andere wurde die Lösung von Laguerre[20]) gegeben, dem es gelang, den Begriff des Winkels projektiv zu machen; aber derjenige, welcher die Lösung in ihrer ganzen Allgemeinheit gab, war Cayley[21]) (1859), der in dem sechsten von seinen berühmten *Memoirs upon Quantics* zeigte, daß jede metrische Eigenschaft einer ebenen Figur als in einer

19) *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (*Math. Ann.* 4).

20) *Nouv. Ann.* 12.

21) *Phil. Trans.* 149; vgl. Clifford, *Analytical Metrics* (*Quart. Journ.* 1865, 1866 oder *Mathematical Papers*, S. 80).

projektiven Beziehung zwischen dieser und einem festen Kegelschnitte enthalten betrachtet werden könne.

Nun besteht der Hauptzweck der angeführten Abhandlung von Klein eben darin, die innige Beziehung zwischen den Schlüssen Cayleys und denen, zu welchen Bolyai und Lobatschewsky gelangt waren, herzustellen; auf welche lichtvolle Weise dieses Ziel erreicht ist, das beweist der große Ruhm, zu dem diese Schrift alsbald gelangte.[22])

An diese Schriften schließen sich viele andere; an die von Riemann und Beltrami einige interessante Arbeiten von de Tilly,[23]) Genocchi,[24]) von Escherich[25]) und Bianchi;[26]) an die von Klein verschiedene Abhandlungen von Battaglini,[27]) d'Ovidio,[28]) de Paolis[29]) und Aschieri,[30]) Cayley,[31]) Lindemann,[32]) Schering,[33]) von Story,[34])

---

22) Eine spätere Abhandlung von Klein unter demselben Titel (*Math. Ann.* 6) ist zur Ergänzung einiger Punkte der ersteren bestimmt. An dieselbe knüpfen sich die wichtigen Untersuchungen von Lüroth und Zeuthen (*Math. Ann.* 7), von Thomae (vgl. die 2. Aufl. der *Geometrie der Lage* von Reye), von Darboux (*Math. Ann.* 17), von Schur (das. 18), de Paolis (*Lincei Mem.* 1880–1881) und von Reye (3. Aufl. der *Geometrie der Lage*) über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

23) *Études de mécanique abstraite* (*Mémoires couronnées par l'Académie de Belgique* 21, 1870).

24) *Bulletin de l'Académie de Belgique* II, 36; *Torino Mem.* II, 29; *Mem. de la società italiana delle scienze* III, 2.

25) *Wiener Ber.* 1874. Man sehe auch die schöne Abhandlung von Beltrami: *Sulle equazioni generali dell' elasticità*, in den *Annali di Matem.* II, 10.

26) *Sull' applicabilità delle superficie degli spazii a curvatura costante* (*Lincei Atti* III, 2).

27) *Lincei Rend* 1873 und 1876.

28) *Annali di Matem.* II, 6, 7; *Giorn. di Matem.* 13; *Torino Atti*, 1876; *Lincei Mem.* III, 3; *Lombardo Rend.* 1881.

29) *Lincei Mem.* 1877—1878.

30) *Lombardo Rend.* II, 14, 15.

31) *Math. Ann.* 5.

32) *Math. Ann.* 7.

33) *Göttinger Nachr.* 1873.

34) *Amer. Journ.* 2, 4, 5.

H. Stahl[35]) und Voß,[36]) von H. Cox[37]) und A. Buchheim.[38])

Die mathematische Litteratur der allerneuesten Zeit jedoch ist nicht sehr reich an Forschungen auf diesem Gebiete;[39]) es hat den Anschein, als wenn jenes Zeitalter, welches man das heroische nennen könnte, und durch welches jede Disziplin einmal hindurchgeht, schon von der Nicht-Euklidischen Geometrie durchlaufen sei. Sollten vielleicht die unermüdlichen Arbeiter der beiden Jahrzehnte 1860—1880 die Minen in jeder Richtung so gründlich durchwühlt haben, daß sie keine goldführende Ader mehr bergen?

IX.

Geometrie von n Dimensionen.

Die Theorie der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeiten oder die Geometrie von n Dimensionen verdankt ihren Ursprung der Unterstützung, welche die Algebra von der Geometrie erhielt, seitdem Cartesius jene auf diese anzuwenden gelehrt hat. In der That ist diese Unterstützung eine begrenzte, da nur die analytischen Thatsachen, welche mit der Theorie der Funktionen einer, zweier oder dreier Variabelen verknüpft sind (oder mit der Theorie der binären, ternären oder quaternären Formen), einer den Sinnen zugänglichen

35) *Die Massfunktionen in der analytischen Geometrie.* Programm (Berlin, 1873).

36) *Math. Ann.* 10.

37) *Quart. Journ.* 18.

38) *On the theory of screws in elliptic space.* (*Proc. math. Soc.* 15 und 16).

39) Die interessantesten von den mir bekannten sind die von Segre, *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere,* veröffentlicht in den *Torino Atti,* 1883.

Darstellung fähig sind. Aber der Geist der Verallgemeinerung, der, wie ich schon sagte, einer der mächtigsten Antriebe zu den modernen geometrischen Untersuchungen war und noch fortwährend ist, bewog die Geometer, die Fesseln zu brechen, welche die Natur ihrem Vorstellungsvermögen angelegt zu haben schien, und von beliebig ausgedehnten Räumen zu sprechen.[1])

Und sie sprachen davon, ehe sie sich noch mit der mehr philosophischen, als mathematischen Frage beschäftigt hatten, ob in der That solche Räume existieren; und sie thaten dies mit Recht, da sie nur so, ohne ein vielleicht unlösbares Problem in Angriff zu nehmen, ihr Ziel erreichen konnten; durch eine kühne Einbildungskraft verschafften sie sich die (sinnlich wahrnehmbaren oder übersinnlichen) Darstellungen vieler analytischer Resultate.[2])

Um zu zeigen, daß man wirklich in der angegebenen Weise zu einer solchen Theorie gekommen ist, begnüge ich mich damit, die Thatsache anzuführen, daß dieselbe von Analysten wie Cauchy[3]) (1789—1857) und Riemann[4]) aufgestellt wurde; daß sie sich noch bei vielen anderen minder bedeutenden mehr oder weniger versteckt findet in der Absicht, für die Theoreme der Analysis ausdrucksvollere Fassungen zu erhalten; ferner daß Lagrange schon Ende des vergangenen Jahrhunderts die Bemerkung machte, „daß man die Mechanik als eine Geometrie von vier Dimensionen

---

1) Das Produkt zweier Strecken ist eine Fläche, das dreier ein Körper, was ist das geometrische Bild des Produktes von vieren? — Die analytischen Geometer der Cartesischen Epoche bezeichneten dasselbe durch das Wort „sursolide“ (überkörperlich), welches sich in ihren Schriften findet; man kann sie daher als diejenigen ansehen, welche zuerst die im Texte erwähnte Richtung eingeschlagen haben.

2) S. Cayley, *A memoir on abstract Geometry* (*Phil. Trans.* 1870); vgl. auch *Cambridge Journ.* 4, 1845.

3) *Comptes rendus*, 1847.

4) Überdies scheint es außer Zweifel zu stehen, daß Gauß ausgedehnte und bestimmte Ideen über die Geometrie von mehreren Dimensionen gehabt hat; vgl. Sartorius von Waltershausen, a. O. S. 81 (s. Note 9 des vor. Abschn.).

ansehen könne", in welcher die Zeit als vierte Koordinate fungiert.[5])

Dieser Begriff des beliebig ausgedehnten Raumes ist jedoch seinem Ursprunge und seiner Bestimmung nach wesentlich analytisch. Plücker, dem das Schicksal einen so wichtigen Anteil an der Förderung der modernen Geometrie zugeteilt hat, war es vorbehalten, diesem Begriffe ein geometrisches Gewand zu geben, indem er beobachtete, daß man unserem Raume eine beliebige Anzahl Dimensionen zuerteilen kann vermittelst einer passenden Wahl des geometrischen Gebildes, welches man als erzeugendes Element des Raumes auffaßt; so wird er drei Dimensionen haben, wenn man den Punkt oder die Ebene wählt, vier, wenn man die Gerade oder die Kugel nimmt, neun, wenn man die Fläche zweiten Grades nimmt, u. s. w.[6])

---

5) *Théorie des fonctions analytiques* (Paris, an V, S. 223).

6) Ich darf nicht verschweigen, daß schon 1827 Möbius einen Einblick hatte, wie durch Zulassung der Existenz eines vierdimensionalen Raumes ein unerklärlicher Unterschied zwischen der Ebene und dem Raume aufgehoben wird; dieser Unterschied besteht darin, daß, während man zwei in Bezug auf eine Gerade symmetrische ebene Figuren immer zur Deckung bringen kann, es nicht möglich ist, zwei räumliche in Bezug auf eine Ebene symmetrische Figuren zusammenfallen zu lassen. Später bemerkte Zöllner beiläufig, wie die Existenz eines vierdimensionalen Raumes gewisse Bewegungen zulassen würde, die wir für unmöglich halten; die folgenden Resultate können als Beispiele zu dieser Beobachtung dienen: Newcomb zeigte (*Amer. Journ.* 1), daß, wenn es einen Raum von vier Dimensionen giebt, es möglich ist, die beiden Seiten einer geschlossenen materiellen Fläche umzuwechseln, ohne dieselbe zu zerreißen. Klein bemerkte (*Math. Ann.* 9), daß bei dieser Voraussetzung die Knoten nicht erhalten bleiben könnten, und Veronese führte (in der 1881 an der Universität zu Padua gehaltenen *Prolusione*) die Thatsache an, daß man dann aus einem geschlossenen Zimmer einen Körper herausnehmen könne, ohne die Wände desselben zu zerbrechen. Hoppe gab (*Grunerts Arch.* 64) Formeln an, welche die Beobachtungen Kleins illustrierten. Diese Formeln erforderten einige Modifikationen, die von Durège angegeben wurden (*Wiener Ber.* 1880); vgl. auch *Grunerts Arch.* 65 und die synthetischen Betrachtungen von Schlegel, *Zeitschr. f. Math.* 28.

Dieser Gedanke ist weniger abstrakt als der vorhergehende, und leichter zu begreifen; dessen ungeachtet verbreitete er sich viel langsamer, als der erstere, wahrscheinlich deswegen, weil sein Urheber nicht Worte genug machte, um seine Wichtigkeit zu zeigen. Der andere hingegen wurde besonders infolge der berühmten Abhandlung von Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, in vielen Richtungen weiter entwickelt, und die mathematische Litteratur über diesen Gegenstand ist von einer schon beträchtlichen Reichhaltigkeit und wächst noch von Tag zu Tag.

Zur Rechtfertigung dieser Behauptung erinnere ich an die schon genannten Abhandlungen von Helmholtz, führe die von Beltrami,[7]) Schläfli,[8]) Newcomb,[9]) Stringham,[10]) das neue Buch von Killing[11]) an und die darauf folgenden Untersuchungen von Schur,[12]) die enge mit der Riemannschen Abhandlung zusammenhängen; die Untersuchung von Betti[13]) über den Zusammenhang eines Raumes von n Dimensionen; die von Clifford,[14]) Beltrami,[15]) Jordan,[16]) von Lipschitz,[17]) Monro,[18]) Scheeffer (1859–1885),[19]) Heath[20]) und Killing[21]) über die Kinematik und Mechanik eines

---

7) *Annali di Matem.* II, 2 und 5.

8) *Journ. für Math.* 65; *Annali di Matem.* II, 5.

9) *Journ. für Math.* 83.

10) *Amer. Journ.* 2.

11) *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig, 1885.

12) *Math. Ann.* 27.

13) *Annali di Matem.* II, 4.

14) *Proc. math. Soc.* 7 oder *Mathematical Papers*, S. 236.

15) *Bull. sciences math.* 11, 1876.

16) *Comptes rendus*, 79.

17) *Journ. für Math.* 70 flgg., *Quart. Journ.* 12.

18) *Proc. math. Soc.* 9.

19) *Berliner Dissertation*, 1880.

20) *Phil. Trans.* 175.

21) *Journ. für Math.* 98.

solchen Raumes;[22]) ferner die von Jordan[23]) und Brunel[24]) über die verschiedenen Berührungs- und Schmiegungsräume, welche eine Kurve in einem Raume von n Dimensionen zuläßt,[25]) die von Craig[26]) über die metrischen Eigenschaften der Oberflächen in einem solchen Raume, die von Kronecker,[27]) von Beez,[28]) Lipschitz,[29]) Christoffel,[30]) von Brill,[31]) Suworoff[32]) und Voß[33]) über die Krümmung eines beliebig ausgedehnten Raumes; die von Kronecker und Tonelli[34]) über das Potential; die von Lie,[35]) Klein,[36]) Jordan[23]) und Lipschitz[37]) über die Erweiterung des Dupinschen und des Eulerschen Lehrsatzes; sodann die konforme Abbildung einer Oberfläche des vierdimensionalen Raumes auf den gewöhnlichen Raum, die von Craig[38]) studiert wurde, endlich die von Lipschitz gegebene Verallgemeinerung des berühmten Problemes der drei Körper.[39]) Zum Schlusse wollen

---

22) Nach Lipschitz hatte Lejeune-Dirichlet (1805—1859) das allgemeine Gravitationsgesetz im elliptischen Raume studiert. Diese Studien wurden dann von Schering bearbeitet und in den *Göttinger Nachr.* 1870 und 1873 veröffentlicht.

23) *Comptes rendus* 79.

24) *Math. Ann.* 19.

25) Hoppe machte analoge Untersuchungen für die Kurven des vierdimensionalen Raumes (*Grunerts Arch.* 64).

26) *Amer. Journ.* 4.

27) *Berliner Ber.* 1869.

28) *Math. Ann.* 7; *Zeitschr. f. Math.* 20, 21, 24.

29) *Journ. für Math.* 70 und 72.

30) *Journ. für Math.* 70.

31) *Math. Ann.* 24.

32) *Bull. sciences math.* I, 4.

33) *Math. Ann.* 26.

34) *Collectanea mathematica; Annali di matem.* II, 10.

35) *Göttinger Nachr.*, 1871.

36) *Math. Ann.* 5.

37) *Journ. für Math.* 81; *Comptes rendus* 82.

38) *Amer. Journ.* 4.

39) *Journ. für Math.* 74 oder *Quart. Journ.* 12. Ich füge noch hinzu, daß Salmon und Cayley sich der Räume von mehreren Dimensionen in ihren Untersuchungen über die Theorie der Charakteristiken (§ IV) bedient haben, daß Mehler, *Journ. für Math.* 84,

wir die Aufmerksamkeit des Lesers lenken auf die Erweiterungen gewisser Begriffe, einiger Sätze und Formeln der elementaren Geometrie, die vorzüglich von Rudel,[40]) Hoppe,[41]) Schlegel[42]) und Mehmke[43]) gemacht sind; dazu gehören auch die Untersuchungen von Stringham,[44]) Hoppe,[45]) Schlegel,[46]) Scheffler,[47]) Rudel,[48]) O. Biermann,[49]) Puchta[50]) und anderen über die regulären Körper des vierdimensionalen Raumes, die soweit gediehen, daß sie Schlegel gestatteten, Modelle der Projektionen dieser Körper auf unseren Raum herzustellen.[51])

Außer dieser Richtung wurde eine andere nicht weniger fruchtbare von den Bearbeitern der Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen verfolgt, welche projektiv ist, während die erstere wesentlich metrisch ist. — Eine kurze Andeutung,

---

eine Anwendung von der Betrachtung eines vierdimensionalen Raumes für Untersuchungen über dreifache Systeme orthogonaler Oberflächen, und daß Lewis davon eine ähnliche Anwendung machte bei der Betrachtung einiger Trägheitsmomente (*Quart. Journ.* 16). Dann fand Wolstenholme, daß die Zahl der Normalen, die man von einem Punkte eines d-dimensionalen Raumes an eine Oberfläche von der n^{ten} Ordnung ziehen kann, $\frac{n}{n-2}\{(n-1)^d-1\}$ beträgt (*Educational Times* 10).

40) *Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie* (Bamberg, 1887).

41) *Grunerts Arch.* 64.

42) *Bull. Soc. math.* 10.

43) *Grunerts Arch.* 70.

44) *Amer. Journ.* 3.

45) *Grunerts Arch.* 66, 67, 68, 69.

46) *Nova Acta der Leopold.-Carol. Akademie* 44.

47) *Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.*

48) *Von Körpern höherer Dimensionen* (Kaiserslautern, 1882).

49) *Wiener Ber.* 90.

50) *Wiener Ber.* 89 und 90.

51) Diese bilden eine der merkwürdigsten von den durch L. Brill in Darmstadt veröffentlichten Serien von Modellen.

die von Cayley im Jahre 1846 gegeben wurde[52]) über eine Methode, um die Konfigurationen von Punkten, Geraden und Ebenen zu untersuchen, kann man als die erste ansehen, welche auf diese neue Richtung hinwies. Aber es scheint, wie Bailly[53]) bemerkt hat, „daß die Ideen, wie wir, ein Kindesalter und eine erste Zeit der Schwäche haben; sie sind nicht von Geburt an produktiv, sondern erhalten erst mit dem Alter und mit der Zeit ihre Fruchtbarkeit". Daher sehen wir denn mehr als 30 Jahre verfließen, ehe der geniale Gedanke des großen englischen Geometers, in der richtigen Weise entwickelt, die synthetische Geometrie der Räume von *n* Dimensionen, welche wir heute besitzen, hervorrief.

Als Einleitung zu derselben muß man die wichtige Arbeit von Clifford ansehen: *On the classification of loci*,[54]) in welcher das allgemeine Studium der Kurven in beliebigen linearen Räumen in Angriff genommen ist; jeden Augenblick kommen in demselben Operationen vor, die wirkliche Erweiterungen derer sind, die man in der gewöhnlichen projektiven Geometrie zu machen pflegt. Jedoch kann man sagen, daß dieser neue Zweig der Geometrie mit der Abhandlung beginnt, die Veronese der *Behandlung der projektiven Eigenschaften der Räume von* n *Dimensionen durch die Prinzipien des Schneidens und Projizierens* gewidmet hat.[55]) In derselben läßt der berühmte Verfasser, Riemann folgend, einen Raum von *n* Dimensionen entstehen, indem er von demselben einen solchen, der eine Dimension weniger hat, von einem außerhalb gelegenen Punkte projiziert, und in-

---

52) *Journ. für Math.* 31, S. 213. Liest man die wenigen Seiten, welche die Abhandlung von Cayley bilden, so gewinnt man die Überzeugung, daß er schon 1846 einen klaren Einblick von der Nützlichkeit hatte, welche der gewöhnlichen Geometrie der Lage die Betrachtung des Raumes von mehreren Dimensionen bringen könne.

53) *Histoire de l'astronomie moderne* 2, S. 60.

54) *Phil. Trans.* 1878 oder *Mathematical Papers* S. 305.

55) *Math. Ann.* 19.

dem er sich dieser Erzeugungsweise bedient, gelangt er zur Erweiterung des grösseren Teiles der Theorien der gewöhnlichen Geometrie der Lage.[56] Die Fruchtbarkeit der in dieser grundlegenden Abhandlung erörterten Prinzipien wurde durch viele interessante Arbeiten, welche die Fortsetzung derselben bilden, ins Licht gestellt; dieselben bereichern noch von Tag zu Tag ein Lehrgebiet, in welchem Italien eine hervorragende Stelle einnimmt. Unter ihnen will ich — abgesehen von denen, die Veronese selbst publiziert hat,[57]) — die Untersuchungen von Segre anführen über die Theorie der quadratischen Gebilde in einem Raume von n Dimensionen und ihre Anwendung auf die Geometrie der Geraden,[58]) über die kollinearen und reciproken Korrespondenzen,[59]) über die Büschel von Kegeln zweiten Grades,[60]) über die Regelflächen,[61]) über die Oberflächen vierter Ord-

. . .

56) Unter den in der Abhandlung von Veronese bearbeiteten Untersuchungen sind die über die Konfigurationen besonderer Erwähnung wert, ferner die Formeln, welche — als eine Erweiterung derer von Plücker und Cayley — die gewöhnlichen Singularitäten einer Kurve eines n-dimensionalen Raumes unter einander verknüpfen, die Erzeugung von in einem solchen Raume enthaltenen Oberflächen durch projektive Systeme und die Anwendung derselben auf das Studium einiger Oberflächen unseres Raumes; dann kann ich nicht stillschweigend übergehen die Studien über die in einem quadratischen Gebilde von n Dimensionen enthaltenen linearen Räume, die Veronese gemacht hat, um einige Sätze von Cayley zu erweitern (*Quart. Journ.* 12), indem er die von Klein (*Math. Ann.* 5) verallgemeinerte stereographische Projektion anwandte, ferner nicht etliche wichtige Resultate über die Kurven, von denen übrigens einige schon Clifford (*Phil. Trans.*, 1878) auf einem anderen Wege erhalten hatte.

57) *Annali di Matem.* II, 11; *Lincei Mem.* 1883—1884; *Atti dell' Istituto Veneto* V, 8. Letztere Abhandlung ist der darstellenden Geometrie des Raumes von 4 Dimensionen gewidmet und kann daher als die Ausführung eines Gedankens angesehen werden, den Sylvester im Jahre 1869 in seiner Rede vor der British Association angedeutet hat.

58) *Torino Mem.* II, 36.

59) *Lincei Mem.* 1883 — 1884; *Torino Mem.* II, 37; *Lincei Rend.* 1886.

60) *Torino Atti* 19.

61) *Torino Atti* 19, 20, 21; *Math. Ann.* 27.

nung mit Doppelkegelschnitt[62]) und über die Theorie der Systeme von Kegelschnitten,[63]) dann die von Bertini[64]) und Aschieri,[65]) die verwandte Gegenstände behandeln; die Schriften von del Pezzo über die Oberflächen in einem n-dimensionalen Raume.[66]) Noch viele andere müßte ich nennen, aber

> Io non posso ritrar di tutti appieno;
> Perocchè sì mi caccia il lungo tema,
> Che molte volte al fatto il dir vien meno.[67])

Jedoch Arbeiten, welche zu verschweigen mich keine Betrachtung verleiten könnte, sind die — viel früher als die von Veronese erschienenen — von Nöther über die eindeutigen Korrespondenzen zwischen zwei n-dimensionalen Räumen (1869, 1874),[68]) jene ebenfalls älteren von Halphen (1875) über die Schnitte der Mannigfaltigkeiten, die in einem beliebigen linearen Raume enthalten sind,[69]) von d'Ovidio

---

62) *Math. Ann.* 24.

63) *Torino Atti* 20.

64) *Lombardo Rend.* 1886; *Lincei Rend.* 1886. Man sehe auch desselben Verfassers wichtige Note: *Sui sistemi lineari, Lombardo Rend.* 82.

65) *Lombardo Rend.* 1885, 1886.

66) *Napoli Rend.* 1885, 1886. Vgl. auch Rodenberg, *Math. Ann.* 26.

67) Ich kann sie alle hier nicht wiederholen,
Weil mich des Stoffes Fülle so bedrängt,
Daß hinter dem Gescheh'nen oft das Wort bleibt.
(Dantes *Divina Commedia*, der *Hölle* 4. Ges. V. 145—147.)

68) *Math. Ann.* 2, 8. Man sehe auch die Abhandlung von S. Kantor, *Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à* n *dimensions* (*Bull. Soc. math.* 8).

69) *Bull. Soc. math.* 2. Unter den in dieser Arbeit erhaltenen Resultaten heben wir folgendes hervor: „Wenn man in einem Raume von $r-1$ Dimensionen zwei algebraische Mannigfaltigkeiten vom Grade μ und ν ins Auge faßt, bezüglich von m und n Dimensionen, so ist der Schnitt derselben eine Mannigfaltigkeit von $n+m-(r-1)$ Dimensionen und vom Grade $\mu\nu$, wofern $m+n \geqq r-1$, und die beiden Mannigfaltigkeiten nicht eine solche von $m+n-r+2$ oder mehr Dimensionen gemeinsam haben", um den vollständigen Beweis desselben anzuführen, den Nöther in den *Math. Ann.* 11 geliefert hat.

über die Metrik eines solchen Raumes (1876),[70]) endlich die neuerlichen von Schubert über die abzählende Geometrie eines Raumes von solcher Beschaffenheit.[71])

Schluss.

Hiermit scheint es mir angemessen, die vorgenommene Musterung zu beschließen. Freilich sind viele wirklich interessante Untersuchungen derselben entgangen, da sie unter keiner der Kategorien, in welche ich die von mir besprochenen Arbeiten eingeteilt habe, Platz finden konnten. So konnte ich nicht über die Theorie der projektiven Koordinaten berichten, die von Chasles[1]) erhalten wurden, als er die gewöhnlichen Cartesischen Koordinaten einer kollinearen Verwandlung unterzog, die dann direkt von Staudt[2]) aufgestellt wurde und vollständiger von Fiedler;[3])

70) *Lincei Mem.* 1876—1877; vgl. auch Jordan (*Bull. Soc. math.* 3). — Hier will ich eine Notiz machen, die im Texte nicht Platz finden konnte: Von vielen wurde behauptet, daß in einem Raume von konstanter positiver Krümmung zwei geodätische Linien, wenn sie sich treffen, im allgemeinen zwei Punkte gemeinsam haben; das ist nun nicht wahr, und dieses wurde zuerst von Klein beobachtet (*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 9, S. 313), dann von Newcomb (*Journ. für Math.* 83) und von Frankland (*Proc. math. Soc.* 8). Über dasselbe Thema sehe man eine Abhandlung von Killing (*Journ. für Math.* 86 und 89).

71) *Math. Ann.* 26; *Acta math.* 8. — Der Abhandlung von Veronese gehen noch die Untersuchungen von Spottiswoode (1825—1883) voran, über die Darstellung der Figuren der Geometrie von n Dimensionen vermittelst correlativer Figuren der gewöhnlichen Geometrie (*Comptes rendus* 81).

1) *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science.*

2) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, § 29.

3) *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich* 15, oder *Die darstellende Geometrie.*

dann habe ich nicht über die Methode der symbolischen Bezeichnung berichtet, da diese mehr Mittel als Zweck für den Geometer ist; die Theorie der Berührungstransformationen (Lie) und der Differential-Invarianten (Halphen) habe ich stillschweigend übergangen, da sie auf der Grenze zwischen der Geometrie und der Theorie der Differentialgleichungen stehen; über die sogenannte *Analysis situs* habe ich mich einer Besprechung enthalten, da eben diese Lehre von Riemann geschaffen und von seinen Schülern betrieben wurde, um Probleme der Funktionentheorie zu lösen. Dann haben sich meiner Darlegung die schönen Auseinandersetzungen von Battaglini und Ball entzogen über die Kräfte und Bewegungen,[4]) von Chasles, Aronhold, Mannheim und Burmester über die kinematische Geometrie und von Reye über die Trägheitsmomente, da sie bisher[5]) mehr zur Mechanik als zur Geometrie gehörig angesehen wurden. Gleiches gilt von den interessanten Experimenten Plateaus (1801—1883) in bezug auf die Minimalflächen, deren Besitz die Physiker für sich beanspruchen, von den schönen Untersuchungen über die Polyeder (Möbius, Bravais, Jordan, Heß), welche den Übergang von der Geometrie zur Mineralogie bilden, und den neuesten Arbeiten über die geometrische Wahrscheinlichkeit (Crofton, Czuber, Cesàro), welche ich geneigt wäre unter die Anwendungen der Geometrie zu rechnen. Dann habe ich nicht über die Methode der Äquipollenzen gesprochen (Bellavitis) und die Theorie der Quaternionen (Hamilton), da beide sich bis jetzt noch

4) Vgl. die interessante Abhandlung von Fiedler, *Geometrie und Geomechanik*, erschienen in der genannten *Vierteljahrsschrift*, und in französischer Übersetzung in *Liouvilles Journ.* III, 4 veröffentlicht.

5) Den Nutzen, welcher der Geometrie durch die Annahme einiger Begriffe, die man jetzt noch als der Mechanik angehörig betrachtet, erwachsen würde, bezeugen der *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral* (Paris, 1861), von Lamarle (1806—1875) verfaßt, die von Mannheim der kinematischen Geometrie gewidmeten Partien in seinem *Cours de géométrie descriptive* (Paris, 1880) und das schöne jüngst veröffentlichte Buch meines Freundes Peano mit dem Titel: *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin, 1887).

nicht von so großer Fruchtbarkeit erwiesen haben, um als notwendiges Hilfsmittel des Geometers angesehen zu werden.

Ungern mußte ich hinweggehen über die Theorie der Kugelsysteme, die mit großem Erfolge von Lie und Reye bearbeitet ist. Ich habe keinen Blick auf die Theorie der Konfigurationen werfen können (Reye, Kantor, Jung, Martinetti), da dieselbe gerade noch im Stadium ihrer Bildung begriffen ist, und auf die mehr den Elementen angehörige Erweiterung der Lehre vom Dreiecke, zu welcher Arbeiten von Brocard[6]) die Anregung gegeben haben. Kurz erwähnen will ich noch zwei Reihen von Untersuchungen über Maximal- und Minimalfiguren, von denen die einen (Painvin, P. Serret, Lebesgüe, Borchardt, Kronecker) das Problem von Lagrange, das Tetraeder größten Inhalts zu finden, von dem die Inhalte der Seitenflächen gegeben sind, und Erweiterungen, bez. Umgestaltungen desselben behandeln,[7]) die anderen (Lindelöf, Berner, Edler, Sturm, Schwarz, Lange, Certo) sich an die berühmten Aufsätze von Steiner[8]) anschließen.[9])

Keinesfalls aber darf mit Stillschweigen übergangen werden, daß es unserem Jahrzehnte vergönnt gewesen ist, die alte Frage der Quadratur des Kreises zur endgiltigen Erledigung zu bringen. Nachdem im vergangenen Jahrhundert Lambert[10]) die Zahl π als irrational nachgewiesen, verblieb immer noch der Nachweis, daß π auch nicht Wurzel

---

6) Man sehe die Anhänge der *Proc. math. Soc.* seit Bd. 14.

7) *Nouv. Ann.* II, 1, 2; *Liouvilles Journ.* II, 7; *Berliner Abh.* 1865, 1866; *Berliner Ber.* 1872 oder *Borchardts Gesammelte Werke*, S. 179, 201, 233.

8) Insbesondere *Journ. für Math.* 24 oder *Werke*, Bd. II. S. 177, 241.

9) S. *Acta Societatis scientiarum Fennicae*, 1866; *Bull. de l'Académie de St. Pétersbourg* 14; *Math. Ann.* 2; *Nouv. Ann.* II, 10; *Zeitschr. f. Math.* 11; *Göttinger Nachr.* 1882 oder *Bull. sciences math.* II, 7; *Journ. für Math.* 96, 97; *Göttinger Nachr.* 1884; *Grunerts Arch.* II, 2; *Giorn. di Matem.* 26.

10) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1761; vgl. Legendres *Eléments de Géometrie*, Note IV der älteren Auflagen.

einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sei; denn erst damit ist dargethan, daß die Quadratur des Kreises nicht vermittelst einer endlichen Anzahl von Konstruktionen, welche mit Hilfe des Lineals und des Zirkels ausführbar sind, vollzogen werden könne. Dieser Beweis wurde, unter Benutzung Hermitescher Vorarbeiten über die Exponentialfunktion, 1882 von Lindemann[11]) erbracht.

Trotz der aufgezählten und unzähliger anderer Unvollkommenheiten des Bildes, das ich über den heutigen Zustand der Geometrie zu entwerfen versucht habe, wird dennoch der Leser, wenn er einen Blick auf dasselbe wirft, von tiefer Verwunderung betroffen sein, nicht allein über die gewaltige Entwickelung der Mathematik in diesen letzten fünfzig Jahren, sondern auch über die neue, schönere, verlockendere Gestalt, welche sie mehr und mehr annimmt.

Die geometrischen Figuren, die eine Zeit lang als fest, unbeweglich, leblos erschienen, bekamen eine unerwartete Lebendigkeit durch die Theorie der geometrischen Transformationen, vermöge derer sie sich bewegen, sich in einander verwandeln, gegenseitige Beziehungen enthüllen und unter sich bisher unbekannte Verwandtschaften herstellen.

Ferner glaubte man eine Zeit lang, daß wir als dreidimensionale Wesen, die in einem Raume leben, in welchem wir nur drei Dimensionen wahrnehmen können, dazu verurteilt wären, ewig nur die Mannigfaltigkeiten von nicht mehr als drei Dimensionen zu studieren. Jetzt aber ist es uns erlaubt und fast unsere Pflicht, von dieser Idee als einem gefährlichen Vorurteile uns frei zu machen, und die Fülle von Arbeiten, die wir vor uns bewundern, belehren alle diejenigen, welche ihre Augen nicht von der neuen Sonne wegwenden wollen, über die Wichtigkeit dieses Fortschrittes.

Endlich ist, kann man sagen, der Kampf zwischen der Geometrie und der Analysis, der sich gegen Ende des ver-

---

11) *Berliner Ber.* 1882; *Math. Ann.* 20; vereinfacht durch Weierstraß, *Berliner Ber.* 1885; man vgl. auch Rouché, *Nouv. Ann.* III, 2.

gangenen Jahrhunderts erhoben und zu Anfang dieses fortgesetzt hat, nunmehr beendigt; weder die eine, noch die andere hat den Sieg davon getragen, aber jede hat auch den Ungläubigsten gezeigt, daß sie bei jeglichem Ringen als Siegerin hervorgehen könne. Der *Mécanique analytique*, in welcher Lagrange mit Freuden konstatierte, daß er es soweit gebracht habe, jegliche Figur zu vermeiden, hat ein Lehrbuch der Mechanik einen glänzenden Bescheid gegeben, welches das Motto trägt: „*Geometrica geometrice*"; dem hundertjährigen Dienste, welchen die Algebra der Geometrie bot, können sich heute die zahllosen und unvergleichlichen Vorteile entgegenstellen, welche jene von dieser zog; schließlich wird man doch an Stelle der analytischen oder pseudosynthetischen Theorie der Kurven und Oberflächen in Kurzem die rein synthetische Theorie setzen können, die man gegenwärtig aus dem von Staudt[12]) gelieferten Materiale errichtet.

Und zu dieser Periode des Friedens oder vielmehr des edlen Wetteifers der Analysis und Geometrie müssen sich alle Glück sagen, da jeder Fortschritt der einen einen entsprechenden in der anderen nach sich zieht oder dazu auf-

12) Die einzigen rein synthetischen Untersuchungen über die Kurven und Oberflächen von höherer als zweiter Ordnung, die ich kenne, sind die von Reye *(Geometrie der Lage)* über die ebenen kubischen Kurven, einige von Thieme (*Zeitschr. f. Math* 24; *Math. Ann.* 20, 28), von Milinowski (*Zeitschr. f. Math.* 21, 23; *Journ. für Math* 89, 97) und von Schur (*Zeitschr. f. Math.* 24). Ihnen könnte man die beiden folgenden Arbeiten hinzufügen, die im Jahre 1868 von der Berliner Akademie gekrönt sind: H. J. S. Smith, *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* (*Annali di Matem.* II, 3); Kortum, *Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades* (Bonn, 1869). Die Geometer erwarten ungeduldig die Veröffentlichung einer Schrift von E. Kötter, die 1886 von der Berliner Akademie den Steinerschen Preis erhielt und dazu berufen erscheint, in das Gebiet der reinen Geometrie die allgemeine Theorie der ebenen algebraischen Kurven zu versetzen. (Sie ist während der Anfertigung der Übersetzung vorliegender Schrift in den *Berliner Abh.* 1887 unter dem Titel: *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven* erschienen.)

fordert. Das entspricht dem heutigen Standpunkte der gesamten Wissenschaft, denn nun funktionieren, wie Spencer sagt, die verschiedenen Disziplinen als Hilfskünste, die einen für die anderen.

Diese Stellung der modernen Mathematik jedoch legt jedem, der sie mit Erfolg betreiben will, eine schwere Verpflichtung auf, nämlich die, nicht die eine der beiden Disziplinen, welche sie zusammen bilden, um die andere zu vernachlässigen und sich in der Handhabung der Wissenschaft der Zahlen ebensowohl, als in derjenigen der Ausdehnung auszubilden.[13])

Um heiteren Mutes diese vermehrten Anstrengungen auf uns zu nehmen, dazu hilft uns die Betrachtung, „daß die Analysis und Synthesis im Grunde genommen gleichsam immer vereinigt in unseren Arbeiten sind und zusammen das vollständigste Werkzeug des menschlichen Geistes bilden. Denn unser Geist macht keine Fortschritte, als nur mit der Hilfe von Zeichen oder Bildern, und wenn er zum ersten Male in schwierige Fragen einzudringen sucht, so hat er nicht einen Überfluß an diesen beiden Mitteln und jener besonderen Kraft, die er oft genug nur aus ihrem Zusammenwirken schöpft.“[14])

Indem wir uns also der Beschränktheit unserer Kräfte bewußt sind, werden wir nur ein kleines Feld wählen, auf dem wir unsere Thätigkeit üben, aber nicht vergessen, daß

---

13) Die Angemessenheit des gleichzeitigen Gebrauches der Geometrie und Analysis, auch in den Fragen der angewandten Mathematik, wurde ausdrücklich von Lamé mit folgenden Worten erklärt: *„Quand on médite sur l'histoire des mathématiques appliquées, on est effectivement conduit à attribuer leurs principales découvertes, leurs progrès les plus décisifs à l'association de l'analyse et de la géométrie. Et les travaux, que produit l'emploi de chacun de ces instruments, apparaissent alors comme des préparations, des perfectionnements, en attendant l'époque qui sera fécondée par leur réunion.“* (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 1859, S. XIII und XIV.)

14) Poinsot, *Comptes rendus* 6 (1838) S. 809.

wir, um alle Früchte, die es zu bieten fähig ist, einzuernten, das Recht und sozusagen die Pflicht haben, alle die Hilfsmittel prüfend anzuwenden, welche der menschliche Geist während so vieler Jahrhunderte unausgesetzter Thätigkeit angehäuft hat, und die jedem zu Gebote stehen, der die Klugheit hat, sie zu Rate zu ziehen, und das Geschick, sie anzuwenden.

Abkürzungen für die häufig erwähnten Zeitschriften.

Acta math.: Acta mathematica.
Amer. Journ.: American Journal of Mathematics pure and applied.
Ann. Éc. norm.: Annales scientifiques de l'École normale supérieure.
Annali di Matem.: Annali di Matematica pura ed applicata.
Berliner Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Berliner Ber.: Monatsberichte, bez. seit 1882 Sitzungsberichte oder auch: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen derselben Akademie.
Bologna Mem.: Memorie } dell' Accademia di Scienze dell' Istituto
Bologna Rend.: Rendiconti } di Bologna.
Bull. sciences math.: Bulletin des sciences mathématiques (bis 1884: et astronomiques).
Bull. Soc. math.: Bulletin de la Société mathématique de France.
Cambridge Journ.: Cambridge and Dublin mathematical Journal.
Cambridge Proc.: Proceedings } of the Philosophical Society of Cam-
Cambridge Trans.: Transactions } bridge.
Comptes rendus: Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (de Paris).
Gergonnes Ann.: Annales de Mathématiques.
Giorn. di Matem.: Giornale di Matematiche.
Göttinger Abh.: Abhandlungen } der Gesellschaft der Wissenschaften
Göttinger Nachr.: Nachrichten von } zu Göttingen.
Grunerts Arch.: Archiv der Mathematik und Physik.
Journ. Éc. polyt.: Journal de l'École polytechnique.
Journ. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Irish Proc.: Proceedings } of the Irish Academy.
Irish Trans.: Transactions }

Leipziger Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Lincei Atti: Atti
Lincei Mem.: Memorie
Lincei Rend.: Rendiconti
Lincei Trans.: Transunti
} dell' Accademia dei Lincei.

Liouvilles Journ.: Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Lombardo Rend.: Rendiconti dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Math. Ann.: Mathematische Annalen.

Mém. prés.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences (de Paris).

Münchener Abh.: Abhandlungen
Münchener Ber.: Sitzungsberichte
} der Akademie der Wissenschaften zu München.

Napoli Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de Mathématiques.

Phil. Mag.: London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine.

Phil. Trans.: Philosophical Transactions
Proc. Roy. Soc.: Proceedings
} of the Royal Society of London.

Prager Abh.: Abhandlungen
Prager Ber.: Sitzungsberichte
} der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Proc. math. Soc.: Proceedings of the London mathematical Society.

Quart. Journ.: Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.

Torino Atti: Atti
Torino Mem.: Memorie
} dell' Accademia delle scienze di Torino.

Wiener Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung.

Zeitschr. f. Math.: Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Die arabische Ziffer bezieht sich auf den Band (Teil, Jahrgang), beim *Journ. Éc. polyt.* auf das Heft, die römische auf die Serie (Reihe).

Verzeichnis der verstorbenen Geometer, deren Lebenszeit angegeben ist.

Die Zahl ist die der Seite, auf welcher sie steht.

Abel 20 — d'Alembert 14 — Apollonius 6 — Archimedes 6 — Aronhold 31.

Baltzer 53 — Bellavitis 60 — Benedetti 9 — Bobillier 26 — Bolyai, J. 109 — Bolyai, W. 108 — Borchardt 43 — Bour 56 — Bragelogne 24 — Braikenridge 22.

Caporali 84 — Cardano 8 — Carnot 14 — Cauchy 116 — Chasles 17 — Chelini 57 — Clairaut 13 — Clebsch 27 — Clifford 26 — Cotterill 84 — Côtes 21 — Cramer 22 — Crelle 20.

Desargues 9 — Descartes 10 — Dirichlet 119 — Dupin 15.

Enneper 50 — Eratosthenes 6 — Euler 13.

Ferrari 8 — Fermat 9 — Ferro 8 — Fibonacci 8.

Gauß 47 — Gergonne 16 — La Gournerie 44 — Graßmann 26 — De Gua 22.

Hachette 15 — Halley 11 — Hamilton 104 — Harnack 63 — Hesse 25 — Hipparch 6 — La Hire 11 — Hoüel 109 — Huygens 11.

Jacobi 16 — Joachimsthal 55.

Lacroix 15 — Lagrange 14 — Laguerre 40 — Lamarle 125 — Lambert 88 — Lamé 23 — Lancret 72 — Laplace 14 — Legendre 14 — Leibniz 11 — Liouville 72 — Lobatschewsky 109.

Mac Cullagh 33 — Maclaurin 11 — Magnus 81 — Mascheroni 9 — Mercator 88 — Möbius 18 — Monge 13.

Newton 11.

Oresme 16.

Pappus 6 — Parent 13 — Pascal 9 — Plateau 125 — Plato 5 — Plücker 19 — Poisson 14 — Poncelet 14 — Ptolomaeus 6 — Puiseux 72 — Pythagoras 5.

Richelot 16 — Riemann 110.

Saint-Venant 72 — Scheeffer 118 — Schooten 13 — Serret, A. 50 — Seydewitz 33 — Simpson 11 — Smith 29 — Snellius 16 — Spottiswoode 124 — Staudt 19 — Steiner 18 — Stewart 11 — Sturm, Ch. 104.

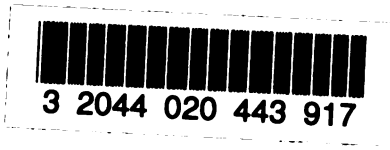
Tartaglia 8 — Thales 4 — Transon 81.

Vieta 9.

Waring 22 — Wren 32.

Berichtigung.

S. 97 Z. 7 v. o. lies viel- statt zwei-.



THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.

WIDENER
BOOK DEPT.
CANCELLED
MAY 16 1984

WIDENER
MAY 28 1996
BOOK DEPT.
CANCELLED